

1. zápočtová písemka z Matematiky III (BA003)

Skupina A

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [4 b.] Mějme dán integrál

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \cos^2 x \, dx \, dy.$$

- a) Načrtněte množinu, přes kterou se integruje.
- b) Zaměňte pořadí integrace.

Řešení:

b) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos^2 x \, dy \, dx.$

2. [4 b.] Budiž dána množina $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x+2)^2 + y^2 < 1\}.$

- a) Nakreslete množinu Ω .
- b) Pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic spočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} -x \, dx \, dy.$$

Řešení:

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r \cos x + 2)r \, dr \, dt = 2\pi.$

3. [4 b.] Nechť $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; y - x^2 > 0, z + y < 2, z > 0\}.$

- a) Načrtněte množinu Ω .
- b) Sestavte trojný integrál vyjadřující objem množiny Ω a převed'te jej na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^2 \int_0^{2-y} 1 \, dz \, dy \, dx.$

4. [4 b.] Mějme množinu $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < 4, -1 < z < 1, x > 0, y < 0\}.$

- a) Načrtněte množinu Ω .
- b) Pomocí transformace souřadnic převed'te trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} xz^2 + 1 \, dx \, dy \, dz$$

na trojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (rz^2 \cos t + 1)r \, dt \, dr \, dz.$

1. zápočtová písemka z Matematiky III (BA003)

Skupina B

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [4 b.] Mějme dán integrál

$$\int_{\frac{1}{4}}^3 \int_{\frac{1}{y}}^4 \sin x \, dx \, dy.$$

- a) Načrtněte množinu, přes kterou se integruje.
- b) Zaměňte pořadí integrace.

Řešení:

b) $\int_{\frac{1}{3}}^4 \int_{\frac{1}{x}}^3 \sin x \, dy \, dx.$

2. [4 b.] Budiž dána množina $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y - 3)^2 < 1\}.$

- a) Nakreslete množinu Ω .
- b) Pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic spočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} 2y - 3 \, dx \, dy.$$

Řešení:

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r \cos x + 3)r \, dr \, dt = 3\pi.$

3. [4 b.] Necht' $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; y < \sqrt{x}, z + x < 9, x > 0, y > 0, z > 0\}.$

- a) Načrtněte množinu Ω .
- b) Sestavte trojný integrál vyjadřující objem množiny Ω a převed'te jej na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{9-x} 1 \, dz \, dy \, dx.$

4. [4 b.] Mějme množinu $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 > 4, x^2 + y^2 + z^2 < 9, x > 0\}.$

- a) Načrtněte množinu Ω .
- b) Pomocí transformace souřadnic převed'te trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} x^2 + 1 \, dx \, dy \, dz$$

na trojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \cos^2 t \cos^2 s + 1)r \cos^2 s \, ds \, dt \, dr.$

1. zápočtová písemka z Matematiky III (BA003)

Skupina C

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [4 b.] Mějme danu množinu $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ; y - e^x < 0, y > 1, x < 2\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
(c) Převed'te dvojný integrál

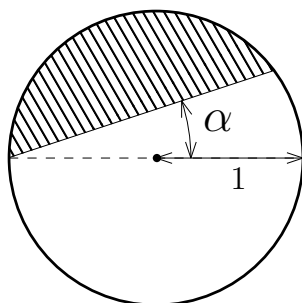
$$\iint_{\Omega} \frac{1}{x+1} dx dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

c) $\int_0^2 \int_1^{e^x} \frac{1}{x+1} dy dx = \int_1^{e^2} \int_{\ln y}^2 \frac{1}{x+1} dx dy.$

2. [4 b.] Pomocí transformace do polárních souřadnic odvod'te obsah vyšrafované části jednotkového kruhu.



Řešení:

$$S = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) - \alpha.$$

3. [4 b.] Necht' $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; x + y < 2, z < x^2 + y^2, x > 0, y > 0, z > 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Převed'te trojný integrál $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_2^{x^2+y^2} \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx.$

4. [4 b.] Mějme množinu $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 < 16, 0 < z < -x + 4, y > 0\}$.

- a) Načrtněte množinu Ω .
b) Pomocí transformace souřadnic převed'te trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} xz^2 + 1 dx dy dz$$

na trojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_0^{\pi} \int_0^4 \int_0^{-r \cos t + 4} r^2 z^2 \cos t + r dz dr dt.$

1. zápočtová písemka z Matematiky III (BA003)

Skupina D

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [4 b.] Mějme danu množinu $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ; y - \sin x > 0, y < 1, 0 < x < \frac{\pi}{2}\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
(c) Převed'te dvojný integrál

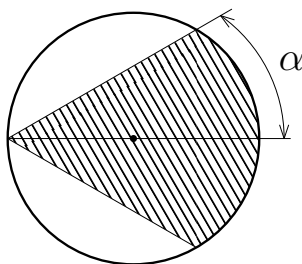
$$\iint_{\Omega} e^{x+y} dx dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sin x}^1 e^{x+y} dy dx = \int_0^1 \int_0^{\arcsin y} e^{x+y} dx dy$

2. [4 b.] Pomocí transformace do polárních souřadnic odvoďte obsah vyšrafované části jednotkového kruhu.



Řešení:

$$S = \sin(2\alpha) + 2\alpha.$$

3. [4 b.] Necht' $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; 2y - x > 0, z < x^2, y < 2, y > 0, z > 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Převed'te trojný integrál $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx.$

4. [4 b.] Mějme množinu $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 < 9, 0 < z < x^2 + y^2 + 1, x > 0\}$.

- (a) Načrtněte množinu Ω .
(b) Pomocí transformace souřadnic převed'te trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} x + y dx dy dz$$

na trojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_0^{r^2+1} r^2 (\cos t + \sin t) dz dr dt.$

1. zápočtová písemka z Matematiky III (BA003)

Skupina E

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [4 b.] Mějme danu množinu $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ; y - x^2 + 1 > 0, y > \frac{x-1}{2}, x < 0, y < 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
(c) Převed'te dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} y^3 \, dx \, dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

c) $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \int_{x^2-1}^0 y^3 \, dy \, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_{\frac{x-1}{2}}^0 y^3 \, dy \, dx.$

2. [4 b.] Budiž dána množina $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y+2)^2 < 4, y < x, x < 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Pomocí transformace do polárních souřadnic převed'te dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{-4 \sin t} r^3 \cos t \sin t \, dr \, dt.$

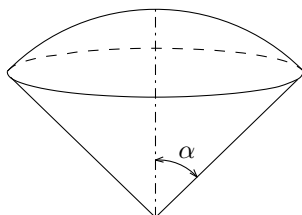
3. [4 b.] Nechť $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; z + x - 4 < 0, y < 1, x + \frac{y}{2} < 1, x > 0, y > 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Sestavte trojný integrál vyjadřující objem množiny Ω a převed'te jej na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_0^1 \int_0^{1-\frac{y}{2}} \int_0^{4-x} 1 \, dz \, dx \, dy.$

4. [4 b.] Pomocí transformace do kulových souřadnic odvoďte objem části jednotkové koule, která je znázorněna na obrázku.



Řešení:

$$V = -\frac{2}{3}\pi \cos \alpha + \frac{2}{3}\pi.$$

1. zápočtová písemka z Matematiky III (BA003)

Skupina F

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [4 b.] Mějme danu množinu $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ; y - x^2 > 0, y > \sqrt{8x}, y < 5, x > 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
(c) Převed'te dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \sqrt{x} \, dx \, dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

c) $\int_0^2 \int_{\sqrt{8x}}^5 \sqrt{x} \, dy \, dx + \int_2^{\sqrt{5}} \int_{x^2}^5 \sqrt{x} \, dy \, dx.$

2. [4 b.] Budiž dána množina $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y - 1)^2 < 1, y > x\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Pomocí transformace do polárních souřadnic převed'te dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} x^3 y \, dx \, dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^{2 \sin t} r^5 \cos t \sin t \, dr \, dt.$

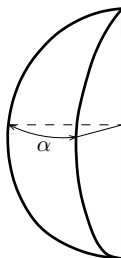
3. [4 b.] Nechť $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; z + 3x + 2y < 6, z > 0, y > 0, y < 2, x > 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Sestavte trojný integrál vyjadřující objem množiny Ω a převed'te jej na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_0^2 \int_0^{2 - \frac{2y}{3}} \int_0^{6 - 3x - 2y} 1 \, dz \, dx \, dy.$

4. [4 b.] Pomocí transformace do kulových souřadnic odvoďte objem části jednotkové koule, která je znázorněna na obrázku.



Řešení:

$$V = \frac{2}{3}\alpha$$

1. zápočtová písemka z Matematiky III (BA003)

Skupina G

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [4 b.] Mějme danu množinu $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ; y - e^x < 0, y - x > 0, y < 2, x > 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
- (b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
- (c) Převed'te dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} e^{2x} dx dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

c) $\int_0^{\ln 2} \int_x^{e^x} e^{2x} dy dx + \int_{\ln 2}^2 \int_x^2 e^{2x} dy dx.$

2. [4 b.] Budiž dána množina $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 2y, x^2 + y^2 < 16, x > 0, y > 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
- (b) Pomocí transformace do polárních souřadnic převed'te dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2 \sin t}^4 r^2 dr dt.$

3. [4 b.] Nechť $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; z + y < 2, x + y < 2, x - y > -2, y > 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
- (b) Sestavte trojný integrál vyjadřující objem množiny Ω a převed'te jej na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_0^2 \int_{2+x}^{2-x} \int_0^{2-y} 1 dz dx dy.$

4. [4 b.] Mějme množinu $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < z < 4, x > 0\}$.

- (a) Načrtněte množinu Ω .
- (b) Pomocí transformace souřadnic vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} y + 1 dx dy dz.$$

Řešení:

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r^2 \sin t + r dz dr dt = 4\pi.$

1. zápočtová písemka z Matematiky III (BA003)

Skupina H

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [4 b.] Mějme danu množinu $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ; xy < 1, y - 2x > 0, y - 3x < 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
(c) Převed'te dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} x^2 + y^2 \, dx \, dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

c) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \int_{2x}^{3x} x^2 + y^2 \, dy \, dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{2x}^{\frac{1}{x}} x^2 + y^2 \, dy \, dx.$

2. [4 b.] Budiž dána množina $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 > 2x, x^2 + y^2 < 4, x > 0, y < 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Pomocí transformace do polárních souřadnic převed'te dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_1^{2 \cos t} \frac{1}{r} \, dr \, dt.$

3. [4 b.] Nechť $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; z - y < 1, x + y < 3, x - y > -3, y > 0\}$.

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Sestavte trojný integrál vyjadřující objem množiny Ω a převed'te jej na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

Řešení:

b) $\int_0^3 \int_{3+x}^{3-x} \int_0^{1+y} 1 \, dz \, dx \, dy.$

4. [4 b.] Mějme množinu $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 < 4, 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2}, y > 0\}$.

- (a) Načrtněte množinu Ω .
(b) Pomocí transformace souřadnic vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz.$$

Řešení:

b) $\int_0^{\pi} \int_0^4 \int_0^r r^2 \cos t \, dz \, dr \, dt = 0.$