Zkoušková písemka z Matematiky V (CA001)

23. 1. 2017

Poznámky:

- *Pokud není uvedeno jinak, tak všechny výpočty ve všech příkladech provádějte s čísly zaokrouhlenými na* ***4 desetinná místa****.*
- *Všechny úhlové veličiny jsou v* ***radiánech****.*

1. [*25 b.*] Nechť je dána rovnice
$$x^3 = 2x + 2.$$
   a) Určete interval, ve kterém leží její řešení.
   b) Nalezněte toto řešení metodou prosté iterace. Iterace ukončete jakmile $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-2}$. Ověřte podmínky konvergence.

   Řešení:
   b) Výsledky záleží na zvolené počáteční aproximaci a konvergují k přesnému řešení $\hat{x} = 1.76929235$,

2. [*20 b.*] Mějme dána následující data:

x_i	y_i	y_i'
-1	-2	1
0	0	0
2	4	-1

   a) Sestrojte Hermitův interpolační polynom ve zobecněném Newtonově tvaru pro data podle tabulky.
   b) Načrtněte graf tohoto polynomu.

   Řešení:
   a) $P_5(x) = -2 + (x+1) + (x+1)^2 - 3(x+1)^2x + \frac{4}{3}(x+1)^2x^2 - \frac{25}{36}(x+1)^2x^2(x-2)$.

3. [*20 b.*] Budiž dána okrajová úloha
$$\begin{aligned} -0.4y'' - 2y &= 3(x-1) \quad \text{na } (1,2)\,, \\ y(1) &= -1, \\ y(2) &= 0. \end{aligned}$$
   Napište její slabou (Galerkinovu) formulaci.
   Řešení:
   Hledáme funkci $y \in W = \left\{y \in PC^1(1,2);\ y(1) = 1, y(2) = 0\right\}$ *takovou,*
   že pro každé $v \in V = \left\{v \in PC^1(1,2);\ v(1) = 0, v(2) = 0\right\}$ *platí*
$$0.4\int_1^2 y'v'\,\mathrm{d}x - 2\int_1^2 yv\,\mathrm{d}x = \int_1^2 3(x-1)v\,\mathrm{d}x.$$

4. [*15 b.*]
   a) Formulujte úlohu o proložení křivky empiricky získanými daty metodou nejmenších čtverců.
   b) Data

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	2	0	2	0	2	0

   aproximujte metodou nejmenších čtverců polynomem nultého stupně.

   Řešení: