Zadání

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Varianta 1

Volba matic M, N a startovacího vektoru $\mathbf{x}^{(0)}$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad N = M - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. iterace

$$M\mathbf{x}^{(1)} = N\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} 3x^{(1)} - y^{(1)} &= 4 \\ x^{(1)} + 4y^{(1)} &= 4 \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5385 \\ 0.6154 \end{bmatrix}$$

Varianta 2

Volba matic M, N a startovacího vektoru $\mathbf{x}^{(0)}$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad N = M - A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. iterace

$$M\mathbf{x}^{(1)} = N\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} 2x^{(1)} \phantom{{}+3y^{(1)}} &= 4 \\ x^{(1)} + 3y^{(1)} &= 4 \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.6667 \end{bmatrix}$$

Variante 3

Volba matic M, N a startovacího vektoru $\mathbf{x}^{(0)}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad N = M - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. iterace

$$M\mathbf{x}^{(1)} = N\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

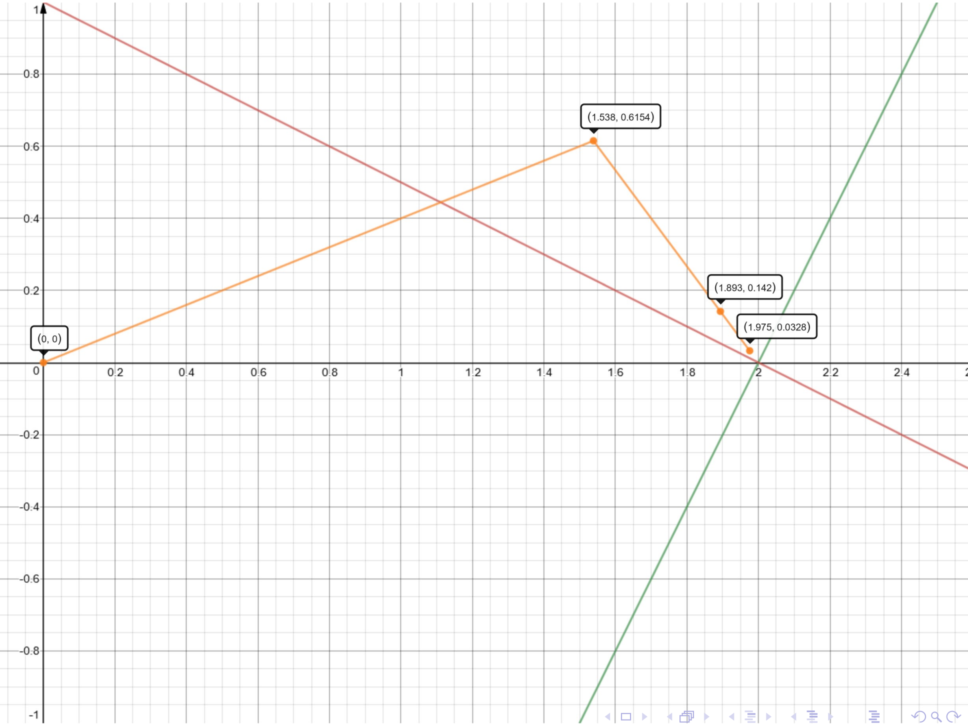
$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Závěr - Varianta 1

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	0	0
1	1.5385	0.6154
2	1.8935	0.1420
3	1.9754	0.0328
$\vdots$		
8	2.0000	0.0000

- Metoda rychle konverguje.
- Soustava, kterou je potřeba v každé iteraci vyřešit je poměrně složitá.

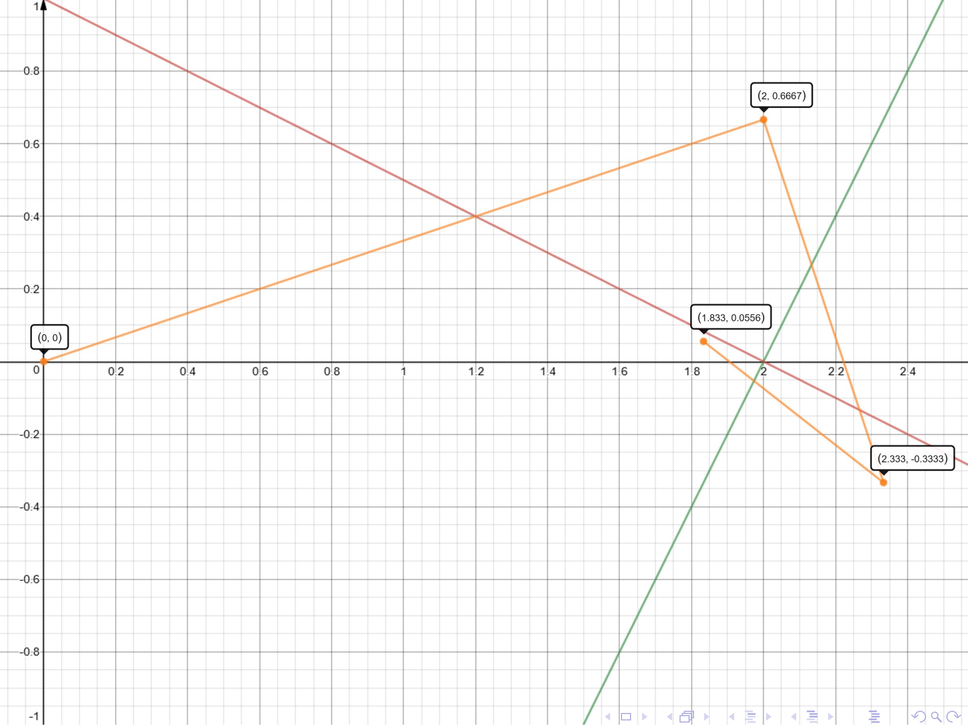

(1.538, 0.6154)
(1.893, 0.142)
(1.975, 0.0328)
(0, 0)

Závěr - Varianta 2

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	0	0
1	2	0.6667
2	2.3333	−0.3333
3	1.8333	0.0556
⋮		
12	2.0000	0.0000

- Metoda konverguje, ale ne nijak zvlášť rychle.
- Soustava, kterou je potřeba v každé iteraci vyřešit je poměrně snadná.



(2, 0.6667)
(1.833, 0.0556)
(0, 0)
(2.333, -0.3333)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1

Závěr - Varianta 3

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	0	0
1	4	4
2	4	-16
3	-16	44

- Metoda diverguje.
- Soustava, kterou je potřeba v každé iteraci vyřešit je velmi snadná.