

## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04)

### skupina A

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1, \\ ae^{-x} & \text{pro } x \in \langle 1, \infty \rangle, \end{cases}$$

Určete:

- Konstantu  $a$ .
- Pravděpodobnost  $P(X \leq 2)$  a  $P(X = 2.2)$ .
- $E(X)$  a  $E(-X - 1)$ .
- Hustotu transformované náhodné veličiny  $Y = (X + 1)^2$ .

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ \frac{\sqrt{x}}{3} & \text{pro } x \in (0, 9), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Hustotu  $f(x)$ .
- Pravděpodobnost  $P(X \in (4, 10))$ .
- Rozptyl a modus.

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci danou tabulkou

| $x \backslash y$ | 1    | 2    | 3    |
|------------------|------|------|------|
| 1                | 1/12 | 1/3  | 2/24 |
| 2                | 2/12 | 1/12 | c    |

Určete:

- Obor hodnot  $\Omega$  náhodného vektoru  $(X, Y)$  a konstantu  $c$ .
- Marginální náhodnou veličinu  $X$ : rozdělovací funkci  $p_1(x)$ , její distribuční funkci  $F_1(x)$  a nakreslete jejich grafy.
- Pravděpodobnost  $P(X \leq Y)$ .

## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04)

### skupina B

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1, \\ \frac{a}{x^4} & \text{pro } x \in \langle 1, \infty \rangle, \end{cases}$$

Určete:

- Konstantu  $a$ .
- Pravděpodobnost  $P(X \geq 3)$  a  $P(X = 2.2)$ .
- $D(X)$ ,  $D(-X - 1)$ .
- Hustotu funkci transformované náhodné veličiny  $Y = \ln X$ .

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ \sin x & \text{pro } x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Hustotu  $f(x)$ .
- Pravděpodobnost  $P(X \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}))$ .
- Střední hodnotu a modus.

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci danou tabulkou

| $x \backslash y$ | 1       | 2      |
|------------------|---------|--------|
| 1                | $c/10$  | $c/5$  |
| 2                | $2c/10$ | $c/5$  |
| 3                | $2c/10$ | $c/10$ |

Určete:

- Obor hodnot  $\Omega$  náhodného vektoru  $(X, Y)$  a konstantu  $c$ .
- Marginální náhodnou veličinu  $X$ : rozdělovací funkci  $p_1(x)$ , její distribuční funkci  $F_1(x)$  a nakreslete jejich grafy.
- Pravděpodobnost  $P(X < Y)$ .

## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04) skupina C

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci danou tabulkou:

|        |         |       |        |       |        |
|--------|---------|-------|--------|-------|--------|
| $x$    | 1       | 2     | 3      | 4     | 5      |
| $p(x)$ | $2c/15$ | $c/5$ | $2c/5$ | $c/5$ | $c/15$ |

Určete:

- Konstantu  $c$ .
- Distribuční funkci  $F(x)$  a nakreslete její graf.
- Pravděpodobnost  $P(X = 2)$ ,  $P(X = 2.2)$  a  $P(X \geq 2)$ .
- Střední hodnotu,  $E\left(\left(\frac{X}{5}\right)^2\right)$ , modus.

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ a - \frac{1}{x+1} & \text{pro } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Určete:

- Konstantu  $a$ .
- $P(X < 5)$
- Hustotu transformované náhodné veličiny  $Y = e^{-X}$ .

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{e-1} x e^{x^2} & \text{pro } [x, y] \in (0, 1) \times (0, 2), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete

- Obor hodnot  $\Omega$  (i nakreslit) náhodného vektoru  $(X, Y)$ .
- Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- Pravděpodobnost  $P(Y \leq 1)$ ,  $P([X, Y] = [0.5, 0.5])$ .

## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04)

### skupina D

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci danou tabulkou:

|        |       |   |       |       |
|--------|-------|---|-------|-------|
| $x$    | 1     | 2 | 3     | 4     |
| $p(x)$ | $c/3$ | 0 | $1/3$ | $1/2$ |

Určete:

- Konstantu  $c$ .
- Distribuční funkci  $F(x)$  a nakreslete její graf.
- Pravděpodobnost  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$  a  $P(X \leq 3)$ .
- Střední hodnotu,  $E\left(\left(\frac{X-2}{6}\right)\right)$ , modus.

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ a - \frac{1}{e^x} & \text{pro } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Určete:

- Konstantu  $a$ .
- Pravděpodobnost  $P(1 \leq X \leq 2)$ .
- Hustotu transformované náhodné veličiny  $Y = X^3 + 2$ .

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x & \text{pro } [x, y] \in (0, \frac{1}{2}) \times (0, 4), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete

- Obor hodnot  $\Omega$  (i nakreslit) náhodného vektoru  $(X, Y)$ .
- Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- Pravděpodobnost  $P(Y \geq 1)$ ,  $P([X, Y] = [0.25, 0.5])$ .

## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04)

### skupina E

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$p(x) = \begin{cases} a \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} & x = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Konstantu  $a$ .
- Pravděpodobnost  $P(X = \frac{2}{3})$ ,  $P(X \geq 1)$ .
- Hustotu transformované náhodné veličiny  $Y = 4X^2$ .

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ a + b \cos x & \text{pro } x \in (0, \pi), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Konstanty  $a, b$ .
- Hustotu  $f(x)$ .
- Pravděpodobnost  $P(X = \frac{\pi}{2})$ ,  $P(X \geq \frac{\pi}{2})$ .
- Střední hodnotu,  $E\left(\frac{X-1}{3}\right)$ , modus náhodné veličiny  $X$ .

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{8y(x+2)}{10} & \text{pro } x \in (0, 1) \times (0, 1), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Pravděpodobnost  $P(X > 2, Y < 1)$ ,  $P(X > 0, Y < \frac{1}{3})$ .
- Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- Distribuční funkci marginální náhodné veličiny  $X$ .

## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04)

### skupina F

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$p(x) = \begin{cases} a \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} & x = 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Konstantu  $a$ .
- Pravděpodobnost  $P(X = 0)$ ,  $P(X \geq 1)$ .
- Hustotu transformované náhodné veličiny  $Y = -X^3$ .

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ a + b \ln(e x) & \text{pro } x \in (1, e^2), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Konstanty  $a, b$ .
- Hustotu  $f(x)$ .
- Pravděpodobnost  $P(X = \frac{e}{2})$ ,  $P(X \geq e)$ .
- Střední hodnotu,  $E(X^2 \ln X)$ , modus náhodné veličiny  $X$ .

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+3y^2}{9} & \text{pro } x \in (0, 1) \times (0, 2), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Pravděpodobnost  $P(X > 2, Y < 1)$ ,  $P(X > 0, Y < 1)$ .
- Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- Distribuční funkci marginální náhodné veličiny  $Y$ .

## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04) skupina G

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \sin \frac{x}{3} & \text{pro } x \in (0, 3\pi), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Distribuční funkci  $F(x)$ .
- Pravděpodobnost  $P(X \geq \frac{3\pi}{2})$  a  $P(X \leq \frac{3\pi}{2})$ .
- Střední hodnotu,  $E(-\frac{1}{2}(X-1))$  a modus náhodné veličiny  $X$ .

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ c_1 + c_2 \arctg x & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Určete:

- Konstanty  $c_1, c_2$ .
- Pravděpodobnost  $P(X = 1)$ .
- Hustotu transformované náhodné veličiny  $Y = \ln X$ .

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci danou tabulkou

| $x \backslash y$ | -1  | 0   | 1   |
|------------------|-----|-----|-----|
| 1                | 0   | 1/8 | 1/2 |
| 2                | 1/4 | 1/8 | c   |

Určete:

- Konstantu  $c$  a obor hodnot  $\Omega$  náhodného vektoru  $(X, Y)$ .
- Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- Pravděpodobnost  $P(X > 1, Y > -1)$ ,  $P([X, Y] = [1, 0])$ .
- Rozptyl (dispersi) marginální náhodné veličiny  $Y$ .

## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04) skupina I

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} c(x+1) & \text{pro } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Konstantu  $c$  a modus náhodné veličiny  $X$ .
- Pravděpodobnost  $P(X = \frac{1}{2})$ ,  $P(X \geq \frac{1}{2})$ .
- Střední hodnotu transformované náhodné veličiny  $E(\sin X)$ .

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 2, \\ a + \frac{b}{x\sqrt{x}} & \text{pro } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Určete:

- Konstanty  $a, b$ .
- Pravděpodobnost  $P(X \geq 4)$ ,  $P(X \in (2, 4))$ .
- $E\left(\frac{2-X}{3}\right)$  víte-li, že  $E(X) = 6$ .

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci danou tabulkou

| $x \backslash y$ | 1    | 2   |
|------------------|------|-----|
| 0                | 1/6  | 1/3 |
| 2                | 1/12 | 1/6 |
| 4                | 0    | 1/4 |

Určete:

- Pravděpodobnost  $P((X - Y) \leq 1)$ ,  $P(X = 1)$ .
- Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- Distribuční funkci marginální náhodné veličiny  $X$ .



## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04)

### skupina J

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} -a(x-2) & \text{pro } x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Konstantu  $a$  a modus náhodné veličiny  $X$ .
- Pravděpodobnost  $P(X = 0)$ ,  $P(X \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$ .
- Střední hodnotu transformované náhodné veličiny  $E(\cos X)$ .

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 2, \\ a + \frac{b}{x^2\sqrt{x}} & \text{pro } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Určete:

- Konstanty  $a, b$ .
- Pravděpodobnost  $P(X \geq 4)$ ,  $P(X \in (2, 4))$ .
- $D(\frac{1-2X}{3})$  víte-li, že  $D(X) = \frac{80}{9}$ .

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci danou tabulkou

| $x \backslash y$ | 1    | 2    | 3    |
|------------------|------|------|------|
| -1               | 0    | 3/20 | 1/20 |
| 0                | 3/20 | 3/20 | 1/5  |
| 1                | 1/10 | 1/10 | 1/10 |

Určete:

- Pravděpodobnost  $P((X - Y) > 0)$ ,  $P(X = 1)$ .
- Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- Distribuční funkci marginální náhodné veličiny  $Y$ .

## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04)

### skupina K

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} cx \sin x^2 & \text{pro } x \in (0, \sqrt{\pi}), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Konstantu  $c$ .
- Distribuční funkci  $F(x)$ .
- Pravděpodobnost  $P(X \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}})$  a  $P(X > \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ .

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq e, \\ a + b \ln x & \text{pro } x \in (e, e^3), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Konstanty  $a, b$ .
- Pravděpodobnost  $P(X = 3)$ ,  $P(X \in \langle 1, e^2 \rangle)$ .
- Hustotu transformované náhodné veličiny  $Y = -\ln X$ .

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{15}{16} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+y+1} & [x, y] \in \{1, 2, 3, \dots\} \times \{1, 2, 3, \dots\}, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Pravděpodobnost  $P((X, Y) \in A)$ , kde  $A = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x \leq 1, y \leq 2\}$ .
- Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- Graf distribuční marginální náhodné veličiny  $X$  na intervalu  $\langle 0, 3.5 \rangle$ .

## Zápočtová písemka z Matematiky III (BA04)

### skupina L

1. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} ax \sin x & \text{pro } x \in (0, \pi), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Konstantu  $a$ .
- Distribuční funkci  $F(x)$ .
- Pravděpodobnost  $P(X \leq 1)$  a  $P(X > 1)$ .

2. [4 body] Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq e, \\ a + \frac{b}{\ln x} & \text{pro } x \in (e, e^3), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Konstanty  $a, b$ .
- Pravděpodobnost  $P(X = 3)$ ,  $P(X \in \langle 1, e^2 \rangle)$ .
- Hustotu transformované náhodné veličiny  $Y = -e^X$ .

3. [4 body] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci

$$p(x, y) = \begin{cases} 28 \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3y+2} & [x, y] \in \{1, 2, 3, \dots\} \times \{1, 2, 3, \dots\}, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- Pravděpodobnost  $P((X, Y) \in A)$ , kde  $A = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x \leq 2, y \leq 1\}$ .
- Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- Graf distribuční marginální náhodné veličiny  $Y$  na intervalu  $\langle 0, 3.5 \rangle$ .