

Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina A

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [b.] Nechť náhodná veličina X má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{32}x(x-4) & \text{pro } x \in (0, 4), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Distribuční funkci $F(x)$.
- (b) Pravděpodobnost $P(X \in \langle -1, 1 \rangle)$, $P(X = \sqrt{2})$.
- (c) Rozptyl, modus.
- (d) Hustotu transformované náhodné veličiny $Y = \ln(X) - 4$.

Řešení:

a) $-1/32 x^3 + 3/16 x^2$ pro $x \in (0, 4)$. b) $P(X \in \langle -1, 1 \rangle) = 5/32$, $P(X = \sqrt{2}) = 0$. c) $E(X) = 2$, $E(X^2) = 24/5$, $D(X) = 4/5$, $Mo(X) = 2$. d) $g(y) = -\frac{3}{32} (e^{y+4})^2 (e^{y+4} - 4)$ pro $y \in (-\infty, \ln 4 - 4)$.

2. [b.] Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ k 2^x + l & \text{pro } x \in (0, 3), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstanty k, l .
- (b) Medián náhodné veličiny X .
- (c) Pravděpodobnost $P(X > 3)$, $P(1 < X < 2)$.

Řešení:

a) $k = 1/7, l = -1/7$. b) $x_{0.5} = \ln(9/2)/\ln(2)$. c) $P(X > 3) = 0$, $P(1 < X < 2) = 2/7$.

3. [b.] Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{16}{25} \left(\frac{1}{5}\right)^{x+y-1} & \text{pro } x = 1, 2, 3, \dots, y = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete

- (a) Obor hodnot Ω náhodného vektoru (X, Y) .
- (b) Marginální rozdělovací funkce náhodné veličiny X .
- (c) Pravděpodobnost $P(X \leq 2, Y \geq 1)$, $P(X = 2, Y = 0.1)$, $P(X = 2)$.

Řešení:

b) $p_1(x) = 4(1/5)^x$ pro $x = 1, 2, 3, \dots$ c) $P(X \leq 2, Y \geq 1) = 29/125$, $P(X = 2, Y = 0.1) = 0$, $P(X = 2) = 4/25$

Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina B

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [b.] Nechť náhodná veličina X má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3} & \text{pro } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Distribuční funkci $F(x)$.
- (b) Pravděpodobnost $P(X \in \langle -2, 1 \rangle)$, $P(X > \frac{1}{3})$.
- (c) Rozptyl, modus.
- (d) Hustotu transformované náhodné veličiny $Y = e^{X+3}$.

Řešení:

- a) $F(x) = 1/6 x^3 + 1/2 + x/3$ pro $x \in (0, 4)$. b) $P(X \in \langle -2, 1 \rangle) = 1$, $P(X > \frac{1}{3}) = 31/81$. c) $E(X) = 0$, $E(X^2) = 19/45$, $D(X) = 19/45$, $Mo(X)$ neexistuje. d) $g(y) = \frac{1/2 (\ln(y-3))^2 + 1/3}{y-3}$ pro $y \in [1/e + 3, e + 3]$.

2. [b.] Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ k \log x + l & \text{pro } x \in (1, 10), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstanty k, l .
- (b) Medián náhodné veličiny X .
- (c) Pravděpodobnost $P(0 < X \leq 5)$, $P(X = 5)$.

Řešení:

- a) $k = 1, l = 0$. b) $x_{0.5} = \sqrt{10}$. c) $P(0 < X \leq 5) = \log 5$, $P(X = 5) = 0$

3. [b.] Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{9}{16} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+y+2} & \text{pro } x = 1, 2, 3, \dots, y = 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete

- (a) Obor hodnot Ω náhodného vektoru (X, Y) .
- (b) Marginální rozdělovací funkce náhodné veličiny Y .
- (c) Pravděpodobnost $P(X \leq 1, Y > 2)$, $P(X = 1, Y = 2)$, $P(Y = 1)$.

Řešení:

- b) $p_1(y) = 1/2(2/3)^y$ pro $y = 1, 2, 3, \dots$. c) $P(X \leq 1, Y > 2) = 4/27$, $P(X = 1, Y = 2) = 2/27$, $P(Y = 1) = 1/3$.

Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina C

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [40 b.] Nechť náhodná veličina X má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x^7} & \text{pro } x > 1, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Pravděpodobnost $P(X > 2)$, $P(0 < X < 2)$.
- (b) $E(X)$.
- (c) Hustotu transformované náhodné veličiny $Y = \sqrt{X - 1}$.

Řešení:

- a) $P(X > 2) = 1/64$, $P(0 < X < 2) = 63/64$. b) $E(X) = 6/5$. c) $g(y) = 12y/(y^2 + 1)^7$ pro $y > 0$.

2. [30 b.] Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ k \sin x + l & \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstanty k, l .
- (b) Pravděpodobnost $P(X > \frac{\pi}{4})$, $P(X = \frac{\pi}{4})$.
- (c) 50%-ní kvantil náhodné veličiny X .

Řešení:

- a) $k = 1/2, l = 1/2$. b) $P(X > \frac{\pi}{4}) = -(1/4)\sqrt{2} + 1/2$, $P(X = \frac{\pi}{4}) = 0$. c) $x_{0.5} = 0$.

3. [30 b.] Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci danou tabulkou

$x \backslash y$	-2	0	2
0	0.3	0.2	0.05
1	0.05	0.2	0.2

Určete:

- (a) Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin X, Y .
- (b) Pravděpodobnost $P([X, Y] = [1, 1])$, $P(X - Y \leq 0)$.
- (c) Modus marginální náhodné veličiny Y .
- (d) Distribuční funkci marginální náhodné veličiny Y .

Řešení:

- b) $P([X, Y] = [1, 1]) = 0$, $P(X - Y \leq 0) = 0.45$. c) $\text{Mo}(Y) = 0$.

Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina D

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [40 b.] Nechť náhodná veličina X má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\sqrt{2}}{16} \frac{1}{\sqrt{x^7}} & \text{pro } x > \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Pravděpodobnost $P(X > 1)$, $P(-2 < X < 1)$.
- (b) Střední hodnotu.
- (c) Hustotu transformované náhodné veličiny $Y = X^2 + 1$.

Řešení:

- a) $P(X > 1) = 1/32$, $P(-2 < X < 1) = 31/32$. b) $E(X) = 5/6$ c) $g(y) = \frac{5\sqrt{2}}{32} (y-1)^{-9/4}$ pro $y > \frac{5}{4}$.

2. [30 b.] Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ k e^x + l & \text{pro } x \in (0, 1), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstanty k, l .
- (b) Pravděpodobnost $P(X > 0.1)$, $P(-2 < X \leq 2)$.
- (c) Medián náhodné veličiny X .

Řešení:

- a) $k = 1/(e-1)$, $l = -1/(e-1)$. b) $P(X > 0.1) = \frac{-e^{0.1} + e}{e-1} = 0.9388$, $P(-2 < X \leq 2) = 1$. c) $x_{0.5} = \ln(1/2 + (e/2))$.

3. [30 b.] Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci danou tabulkou

$x \backslash y$	0	2	4
-1	1/18	1/9	2/9
0	1/18	1/9	1/6
1	1/36	1/12	1/6

Určete:

- (a) Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin X, Y .
- (b) Pravděpodobnost $P([X, Y] = [0, 0])$, $P(X + Y \leq 3)$.
- (c) Modus marginální náhodné veličiny X .
- (d) Distribuční funkci marginální náhodné veličiny X .

Řešení:

- b) $P([X, Y] = [0, 0]) = 1/18$, $P(X + Y \leq 3) = 2/3$. c) $Mo(X) = 0$.

Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina E

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [30 b.] Necht' náhodná veličina X má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} ax^4 & \text{pro } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstantu a .
- (b) Distribuční funkci $F(x)$.
- (c) Pravděpodobnost $P(\frac{1}{2} < X \leq \frac{5}{2})$, $P(\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2})$.
- (d) Modus.

Řešení:

- a) $5/31$. b) $F(x) = 1/31 x^5 - 1/31$ pro $1 \leq x < 2$. c) $P(\frac{1}{2} < X \leq \frac{5}{2}) = 1$, $P(\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}) = 781/992$.
d) neexistuje.

2. [30 b.] Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Hustotu $f(x)$.
- (b) Pravděpodobnost $P(X < \frac{\pi}{8})$, $P(X \in (\frac{\pi}{8}, 3\pi))$
- (c) Střední hodnotu, medián.

Řešení:

- a) $f(x) = \sin(2x)$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. b) $P(X < \frac{\pi}{8}) = 1/2 - (1/4)\sqrt{2}$, $P(X \in (\frac{\pi}{8}, 3\pi)) = 1/2 + (1/4)\sqrt{2}$.
c) $E(X) = (1/4)\pi$, $x_{0.5} = (1/4)\pi$.

3. [40 b.] Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{16}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+y} & \text{pro } x = 0, 1, 2, \dots, y = 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

- (a) Obor hodnot Ω náhodného vektoru (X, Y) .
- (b) Marginální rozdělovací funkce náhodné veličiny Y .
- (c) Pravděpodobnost $P(X > 1, Y \geq 2)$, $P(Y < 3)$.
- (d) Hustotu transformované náhodné veličiny $Z = 2(Y - 1)$.

Řešení:

- b) $p_2(y) = 2(1/3)^y$ pro $y = 1, 2, 3, \dots$ c) $P(X > 1, Y \geq 2) = 1/243$, $P(Y < 3) = 8/9$. d) $q(z) = 6(1/3)^{z/2+1}$ pro $z = 0, 2, 4, 6, \dots$

Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina F

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [30 b.] Nechť náhodná veličina X má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} a \sqrt[4]{x} & \text{pro } 1 < x \leq 16, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstantu a .
- (b) Distribuční funkci $F(x)$.
- (c) Pravděpodobnost $P(X \in (0, 1))$, $P(X > 7)$.
- (d) Modus.

Řešení:

- a) $5/124$. b) $-1/31 + 1/31 x^{5/4}$ pro $1 < x \leq 16$. c) $P(X \in (0, 1)) = 0$, $P(X > 7) = 32/31 - (7/31)7^{1/4}$. d) $\text{Mo}(X) = 16$.

2. [30 b.] Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ \frac{\ln x}{2 \ln 2} & \text{pro } x \in (1, 4), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Hustotu $f(x)$.
- (b) Pravděpodobnost $P(X > 0)$, $P(X = 3)$.
- (c) Střední hodnotu, 50%-ní kvantil.

Řešení:

- a) $\frac{1}{2 \ln(2)x}$ pro $x \in (1, 4)$ b) $P(X > 0) = 1$, $P(X = 3) = 0$. c) $E(X) = 3/(2 \ln(2))$, $x_{0.5} = 2$.

3. [40 b.] Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$p(x, y) = \begin{cases} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y+3} & \text{pro } x = 0, 1, 2, \dots, y = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

- (a) Obor hodnot Ω náhodného vektoru (X, Y) .
- (b) Marginální rozdělovací funkce náhodné veličiny X .
- (c) Pravděpodobnost $P(X \leq 2, Y > 0)$, $P(X = 4)$.
- (d) Hustotu transformované náhodné veličiny $Z = 3X - 1$.

Řešení:

- b) $p_1(x) = 4(1/2)^{x+3}$ pro $x = 0, 1, 2, \dots$ c) $P(X \leq 2, Y > 0) = 1 - 1/4 - 1/8$, $P(X = 4) = \frac{1}{2^5}$. d) $q(z) = 4(1/2)^{(z-1)/3+3}$ pro $x = -1, 2, 5, 8, \dots$

Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina G

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [30 b.] Nechť náhodná veličina X má rozdělovací funkci

$$p(x) = \begin{cases} a \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{pro } x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstantu a .
- (b) Pravděpodobnost $P(X \leq 3)$, $P(X = 3)$, $P(X > 3)$.
- (c) Modus.
- (d) Hustotu transformované náhodné veličiny $Y = \frac{X-3}{2}$.

Řešení:

a) $a = 1/8$ b) $P(X < 3) = 15/16$, $P(X = 3) = 1/16$, $P(X > 3) = 1/16$. c) $\text{Mo}(X) = 0$ d) $g(y) = 1/8 \left(\frac{1}{2}\right)^{2y+1}$ pro $y = -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, \dots$,

2. [40 b.] Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ \frac{1}{26} (x\sqrt{x} - 1) & \text{pro } x \in (1, 9), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Hustotu $f(x)$.
- (b) Pravděpodobnost $P(X = 2)$, $P(6 < X < 8)$.
- (c) Střední hodnotu.
- (d) 50%-ní kvantil.

Řešení:

a) $f(x) = \frac{3\sqrt{x}}{52}$ pro $x \in (1, 9)$. b) $P(X = 2) = 0$, $P(6 < X < 8) = -(3/13)\sqrt{2}\sqrt{3} + (8/13)\sqrt{2} = 0.091$. c) $E(X) = 363/65 = 5.58$. d) $x_{0.5} = 14^{2/3} = 5.81$.

3. [30 b.] Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 3y + 1 & \text{pro } [x, y] = (0, 1) \times \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin X, Y .
- (b) Pravděpodobnost $P(X > \frac{1}{2}, Y > 0)$, $P(X > -1, Y > 1)$.
- (c) Distribuční funkci marginální náhodné veličiny X a nakreslete její graf.

Řešení:

a) $f_1(x) = (2/3)x + 2/3$ pro $x \in (0, 1)$, $f_2(y) = 3/2 + 3y$ pro $y \in (-1/3, 1/3)$ b) $P(X > \frac{1}{2}, Y > 0) = 3/8$, $P(X > -1, Y > 1) = 0$. c) $F(x) = 1/3x^2 + 2/3x$ pro $x \in (0, 1)$.

Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina H

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [30 b.] Nechť náhodná veličina X má rozdělovací funkci

$$p(x) = \begin{cases} a \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} & \text{pro } x = 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstantu a .
- (b) Pravděpodobnost $P(X < 3)$, $P(X > 4)$, $P(X = 0)$.
- (c) Modus.
- (d) Hustotu transformované náhodné veličiny $Y = 2(X - 3)$.

Řešení:

- a) $a = 18$ b) $P(X < 3) = 8/9$, $P(X > 4) = 1/81$, $P(X = 0) = 0$ c) $\text{Mo}(X) = 1$ d) $g(y) = 18 \left(\frac{1}{3}\right)^{y/2+5}$ pro $y = -4, -2, 0, 2, \dots$

2. [40 b.] Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ \frac{1}{31} \left(\frac{x^3}{\sqrt{x}} - 1 \right) & \text{pro } x \in (1, 4), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Hustotu $f(x)$.
- (b) Pravděpodobnost $P(1 < X < 7)$, $P(2 < X < 3)$.
- (c) Střední hodnotu.
- (d) Medián.

Řešení:

- a) $f(x) = \frac{5x^{3/2}}{62}$ pro $x \in (1, 4)$. b) $P(1 < X < 7) = 1$, $P(2 < X < 3) = (9/31)\sqrt{3} - (4/31)\sqrt{2} = 0.32$. c) $E(X) = 635/217 = 2.93$ d) $x_{0.5} = 3.069$

3. [30 b.] Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} 16xy & \text{pro } [x, y] = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times (0, 1), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

- (a) Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin X, Y .
- (b) Pravděpodobnost $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{3}, Y > 0)$, $P(X = \frac{1}{4})$.
- (c) Distribuční funkci marginální náhodné veličiny X a nakreslete její graf.

Řešení:

- a) $f_1(x) = 8x$ pro $x \in (0, 1/2)$, $f_2(y) = 2y$ pro $y \in (0, 1)$ b) $P(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{4}, Y > 0) = 7/36$, $P(X = \frac{1}{4}) = 0$. c) $F(x) = 4x^2$ pro $x \in (0, \frac{1}{2})$

Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina I

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [30 b.] Nechť náhodná veličina X má rozdělovací funkci

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x(x-3) + \frac{1}{3} & \text{pro } x = 0, 1, 2, 3. \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Distribuční funkci $F(x)$.
- (b) Pravděpodobnost $P(X > 1)$, $P(X = 3)$.
- (c) Modus a střední hodnotu.

Řešení:

- b) $P(X > 1) = 1/2$, $P(X = 3) = 1/3$. c) $\text{Mo}(X) = \{0; 3\}$, $E(X) = 3/2$.

2. [30 b.] Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ \frac{k}{x^3} + l & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstanty k, l .
- (b) Pravděpodobnost $P(X > 2)$, $P(0 < X < 2)$.
- (c) Medián.

Řešení:

- a) $k = -1, l = 1$. b) $P(X > 2) = 1/8$, $P(0 < X < 2) = 7/8$. c) $x_{0.5} = \sqrt[3]{2}$

3. [40 b.] Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin x & \text{pro } [x, y] = (0, \pi) \times (0, 1), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin X, Y .
- (b) Pravděpodobnost $P(X < \frac{\pi}{2}, Y > 1)$, $P(X < \frac{\pi}{2}, Y < 1/2)$.
- (c) Rozptyl náhodné veličiny Y .
- (d) Hustotu transformované náhodné veličiny $Z = \ln Y$

Řešení:

- a) $f_1(x) = 1/2 \sin(x)$ pro $x \in (0, \pi)$, $f_2(y) = 2y$ pro $y \in (0, 1)$ b) $P(X < \frac{\pi}{2}, Y > 1) = 0$, $P(X < \frac{\pi}{2}, Y < 1/2) = 1/8$. c) $E(Y) = 2/3$, $E(Y^2) = 1/2$, $D(Y) = 1/18$. d) $g(z) = 2e^z e^z$ pro $z \in (-\infty, 0)$.

Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina J

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [30 b.] Necht' náhodná veličina X má rozdělovací funkci

$$p(x) = \begin{cases} -\frac{x}{6} + \frac{1}{3} & \text{pro } x = -1, 0, 1, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Distribuční funkci $F(x)$.
- (b) Pravděpodobnost $P(X \leq 0)$, $P(X = \frac{1}{2})$.
- (c) Modus.

Řešení:

- b) $P(X \leq 0) = 5/6$, $P(X = \frac{1}{2}) = 0$. c) $\text{Mo}(X) = -1$, $E(X) = -1/3$.

2. [30 b.] Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ \frac{k}{x\sqrt{x}} + l & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstanty k, l .
- (b) Pravděpodobnost $P(2 < X < 7)$, $P(X > 7)$.
- (c) Medián.

Řešení:

- a) $k = -1, l = 1$. b) $P(2 < X < 7) = (1/4)\sqrt{2} - (1/49)\sqrt{7}$, $P(X > 7) = (1/49)\sqrt{7}$. c) $x_{0.5} = 2^{2/3}$.

3. [40 b.] Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} ye^{-x} + \frac{1}{2} & \text{pro } [x, y] = (0, 1) \times (-1, 1), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin X, Y .
- (b) Pravděpodobnost $P(X > 0, Y > 0)$, $P([X, Y] = [0.25, 0.25])$.
- (c) Rozptyl marginální náhodné veličiny X .
- (d) Hustotu transformované náhodné veličiny $Z = e^X$.

Řešení:

- a) $f_1(x) = 1$ pro $x \in (0, 1)$, $f_2(y) = y - ye^{-1} + 1/2$ pro $y \in (-1, 1)$. b) $P(X > 0, Y > 0) = 1 - (1/2)e^{-1}$, $P([X, Y] = [0.25, 0.25]) = 0$. c) $E(X) = 1/2$, $E(X^2) = 1/3$, $D(X) = 1/12$. d) $g(z) = 1/z$ pro $x \in (1, e)$.