

# Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina A

*Poznámky:*

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [40 b.] Nechť má náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} a(\cos x + 2) & \text{pro } x \in (-\pi, \pi), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstantu  $a$ .
- (b) Pravděpodobnost  $P(X < 0)$ ,  $P(X \in \langle 0, 2\pi \rangle)$ .
- (c) modus, 50%-ní kvantil náhodné veličiny  $X$ .
- (d) Hustotu transformované náhodné veličiny  $Y = 2X + 1$ .

*Řešení:*

- a)  $a = \frac{1}{4\pi}$ .
- b)  $P(X < 0) = 1/2$ ,  $P(X \in \langle 0, 2\pi \rangle) = 1/2$ .
- c)  $Mo(X) = 0$ ,  $x_{0.5} = 1/2$ .
- d)  $1/8 \frac{\cos(-1/2+y/2)+2}{\pi}$  pro  $y \in (1 - 2\pi, 1 + 2\pi)$ .

2. [30 b.] Spojitá náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ \frac{-2\sqrt{x}}{x} + 2 & \text{pro } x \in (1, 4), \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Pravděpodobnost  $P(X > 0)$ ,  $P(X \in \langle 2, 3 \rangle)$ .
- (b) Hustotu náhodné veličiny  $X$ .
- (c) Střední hodnotu náhodné veličiny  $X$ .

*Řešení:*

- a)  $P(X > 0) = 1$ ,  $P(X \in \langle 2, 3 \rangle) = -2/3 \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .
- b)  $f(x) = x^{-3/2}$  pro  $x \in (1, 4)$ .
- c)  $E(X) = 2$ .

3. [30 b.] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci

$$p(x, y) = \begin{cases} 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{x+y} & x = 1, 2, 3, \dots, y = 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- (b) Pravděpodobnost  $P(X < 3, Y \in \langle 2, 3 \rangle)$ ,  $P(X > 2, Y > 0)$ .
- (c) Distribuční funkci marginální náhodné veličiny  $X$  na intervalu  $\langle 0, 3 \rangle$  a nakreslete její graf.

*Řešení:*

- a)  $p_1(x) = 2 (3^x)^{-1}$  pro  $x = 1, 2, 3, \dots$   $p_2(y) = 2 (3^y)^{-1}$  pro  $y = 1, 2, 3, \dots$
- b)  $P(X < 3, Y \in \langle 2, 3 \rangle) = 80/243$ ,  $P(X > 2, Y > 0) = 1/9$ .

# Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina C

*Poznámky:*

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [40 b.] Nechť má náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$f(x) = \begin{cases} a(x\sqrt{x}) & \text{pro } x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstantu  $a$ .
- (b) Distribuční funkci  $F(x)$ .
- (c) Pravděpodobnost  $P(X > 1)$ ,  $P(X = 1)$ .
- (d) Střední hodnotu, modus.

*Řešení:*

- a)  $a = \frac{5\sqrt{2}}{16}$ .
- b)  $F(x) = 1/8 x^{5/2} \sqrt{2}$  pro  $x \in \langle 0, 2 \rangle$ .
- c)  $P(X > 1) = 1/8 \sqrt{2}$ ,  $P(X = 1) = 0$ .
- d)  $E(X) = 10/7$ ,  $Mo(X) = 2$ .

2. [30 b.] Spojitá náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -1, \\ -\frac{1}{x+k} + l & \text{pro } x > -1, \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstanty  $k, l$ .
- (b) Pravděpodobnost  $P(X > -2)$ ,  $P(X \in \langle 4, 6 \rangle)$ .
- (c) 25%-ní kvantil náhodné veličiny  $X$ .

*Řešení:*

- a)  $k = 2, l = 1$ .
- b)  $P(X > -2) = 1$ ,  $P(X \in \langle 4, 6 \rangle) = 1/24$ .
- c)  $x_{0.25} = -2/3$ .

3. [30 b.] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{9} (x^2 + y + \frac{1}{2}) & x = -1, 1 \quad y = -1, 0, 1, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- (b) Pravděpodobnost  $P(X + Y \leq 0)$ ,  $P(X = 0, Y = 0)$ .
- (c) Pravděpodobnostní funkci transformované náhodné veličiny  $Z = 4Y - 4$ .

*Řešení:*

- a)  $p_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + \frac{1}{2})$  pro  $x = -1, 1$ ,  $p_2(y) = \frac{1}{9}(2y + 3)$  pro  $y = -1, 0, 1$ .
- b)  $P(X + Y \leq 0) = \frac{5}{9}$ ,  $P(X = 0, Y = 0) = 0$ .
- c)  $q(z) = \frac{1}{9}(\frac{z+4}{2} + 3)$  pro  $z \in \{\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}\}$ .

# Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina E

*Poznámky:*

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [30 b.] Nechť má náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{25} & \text{pro } x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Pravděpodobnost  $P(X \in \langle -1, 1 \rangle)$ ,  $P(X = 0)$ .
- (b) Střední hodnotu, rozptyl.
- (c) Hustotu transformované náhodné veličiny  $X = -4X + 1$ .

*Řešení:*

- a)  $P(X \in \langle -1, 1 \rangle) = 7/25$ ,  $P(X = 0) = 3/25$ .
  - b)  $E(X) = 0$ ,  $D(X) = 2.56$ .
  - c)  $g(y) = \frac{3}{25} + 1/25 (1/4 - y/4)^2$  pro  $x \in \{9, 5, 1, -3, -7\}$ .
2. [40 b.] Spojitá náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 2, \\ L + \frac{K}{x^4+1} & \text{pro } x \in (2, \infty), \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstanty  $K, L$ .
- (b) Pravděpodobnost  $P(X \in \langle 4, 6 \rangle)$ ,  $P(X > 1) = 1$ .
- (c) 25%-ní kvantil náhodné veličiny  $X$ .
- (d) Hustotu náhodné veličiny  $X$ .

*Řešení:*

- a)  $K = -17$ ,  $L = 1$ .
  - b)  $P(X \in \langle 4, 6 \rangle) = 0.05304068953$ ,  $P(X > 1)$ .
  - c)  $x_{0.25} = 2.157486195$ .
  - d)  $f(x) = 68 \frac{x^3}{(x^4+1)^2}$  pro  $x > 2$ .
3. [30 b.] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3(1-y^2)}{8} & \text{pro } [x, y] \in (0, 2) \times (-1, 1), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- (b) Pravděpodobnost  $P(X > 1)$ ,  $P(X > 1, Y < -1)$ .
- (c) Distribuční funkci marginální náhodné veličiny  $X$  a nakreslete její graf.

*Řešení:*

- a)  $f_1(x) = 1/2$  pro  $x \in (0, 2)$ ,  $f_2(y) = 3/4 - 3/4 y^2$  pro  $x \in (0, 1)$ .
- b)  $P(X > 1) = 1/2$ ,  $P(X > 1, Y < -1) = 0$ .
- c)  $F(x) = x/2$  pro  $y \in (0, 2)$ .

# Zápočtová písemka z Matematiky III

Skupina F

*Poznámky:*

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [30 b.] Nechť má náhodná veličina  $X$  má rozdělovací funkci

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{85} (2x + x^2) & \text{pro } x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Pravděpodobnost  $P(X > -1)$ ,  $P(X \in (-2, 1))$ .
- (b) Střední hodnotu, rozptyl.
- (c) Hustotu transformované náhodné veličiny  $Y = 3X + \frac{3}{2}$ .

*Řešení:*

- a)  $P(X > -1) = 1$ ,  $P(X \in (-2, 1)) = \frac{3}{85}$ .
- b)  $E(X) = 67/17$ ,  $D(X) = 1.278892734$ .
- c)  $g(y) = -\frac{1}{85} + \frac{2y}{255} + \frac{(-1/2+y/3)^2}{85}$  pro  $y \in \{9/2, 15/2, 21/2, 27/2, 33/2\}$ .

2. [40 b.] Spojitá náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ L + \frac{K}{x^4 + x^2} & \text{pro } x \in (1, \infty), \end{cases}$$

Určete:

- (a) Konstanty  $K, L$ .
- (b) Pravděpodobnost  $P(X = 6), P(X > 6)$ .
- (c) 75%-ní kvantil náhodné veličiny  $X$ .
- (d) Hustotu náhodné veličiny  $X$ .

*Řešení:*

- a)  $K = -2, L = 1$ .
- b)  $P(X = 6) = 0, P(X > 6) = \frac{1}{666}$ .
- c)  $x_{0.75} = 1.540221193$ .
- d)  $f(x) = 2 \frac{4x^3 + 2x}{(x^4 + x^2)^2}$  pro  $x > 1$ .

3. [30 b.] Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} -3x(x-1) & \text{pro } [x, y] \in (0, 1) \times (-1, 1), \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) Marginální rozdělovací funkce a rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin  $X, Y$ .
- (b) Pravděpodobnost  $P(Y > 0)$ ,  $P(X > 0)$ .
- (c) Distribuční funkci marginální náhodné veličiny  $Y$  a nakreslete její graf.

*Řešení:*

- a)  $f_1(x) = -6x^2 + 6x$  pro  $x \in (0, 1)$ ,  $f_2(y) = 1/2$  pro  $y \in (-1, 1)$ .
- b)  $P(Y > 0) = 1/2$ ,  $P(X > 0) = 1$ .
- c)  $F(y) = y/2 - 1/2$  pro  $y \in (-1, 1)$ .