

1. semestrální práce z předmětu Numerika 2 (3NU)

Pokyny

Semestrální práci zpracujte sami nebo ve dvojicích a odevzdejte ji vytištěnou v hodině 21. 3. 2013.
Práce bude obsahovat:

1. Vaše jméno(a), zadaný počáteční problém.
2. Krátky popis vámi implementovaných metod včetně vašeho úplného, řádně okomentovaného kódu.
3. Grafické výstupy s popisky.

Pokud usilujete o hodnocení:

A, B: vypracujte všechny úkoly.

C: vypracujte úkoly: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10.

D: vypracujte úkoly: 1, 2, 3, 4, 9, 5 nebo 10.

E: vypracujte úkoly: 1, 2, 3, 4, 9.

Vaše hodnocení může být o zlepšeno nebo zhoršeno na základě kvality vaší semestrální práce.

Zadání

Nechť je dán počáteční problém

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= -y(t) + q(t) \quad t \in (0, \infty) \\ y(0) &= y_0\end{aligned}\tag{1}$$

1. Najděte analytické řešení problému (1) (můžete použít libovolný software, nebo úlohu vyřešte metodami, které byly prezentovány v předmětu Matematika 3).
2. Vytvořte v matlabu funkci EE.m. Zkopírujte do ní následující kód:

```
function [t,y] = EE(f, a, b, y0, N)
% Vyresí explicitní eulerovou metodou problem
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%          y'   = f(t,y)          t nalezi intervalu (a, b)  %%
%%          y(a) = y0                                     %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% komentare obsahujici vase jmeno, vyznam vstupnich
% a vystupnich parapetru, ukazkove volani, uziti funkce,
% strucny popis matematicke metody

h = (b-a)/N; %delka kroku

t = zeros(N+1,1);
y = zeros(N+1,1);

???

end
```

Doplňte komentáře a nahraďte ??? tak, aby funkce EE.m implementovala EE metodu.

3. Vytvořte matlabovskou funkci IE.m. Zkopírujte do ní následující kód:

```
function [t,y] = IE(p, q , a, b, y0, N)
% komentare

h = (b-a)/N; %delka kroku

t = zeros(N+1,1);
y = zeros(N+1,1);

???

end
```

Doplňte komentáře a nahraďte ??? tak, aby funkce IE.m implementovala IE metodu, kterou bude možné vyřešit problém (1).

4. Vyřešte problém (1) metodami EE a IE na intervalu (0,4) s 10ti kroky. Do jednoho obrázku vykreslete obě numerická řešení společně s analytickým řešením.
5. Vyplňte následující tabulku:

Pocet kroku	velikost kroku	chyba EE	chyba IE
10	0.4	-----	-----
20	0.2	-----	-----
40	0.1	-----	-----
80	0.05	-----	-----
160	0.025	-----	-----
320	0.0125	-----	-----

Chybu měřte jako maximální absolutní hodnotu rozdílu přesné hodnoty a vámi vypočítaných hodnot, tedy

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(x_n) - y_n|.$$

Pro metodu EE vykreslete (bodový) graf, na kterém bude patrné, jak se se zmenšující velikostí kroku zmenšuje i chyba metody. Body proložte funkcí tvaru Ch^p a odhadněte řád konvergence metody. Souhlasí váš výpočet s teorií?

K odhadu koeficientu C, p můžete použít následující kód:

```
function [ C , p ] = MetodaNejmensichCtvercu( x , y )
% prolozeni krivky typu y(x) = C*x^p zadanyimi body.
% funkce najde metodou nejmensich ctvercu koeficienty C,p
% VSTUP
% x .... vektor x-ovych souradnic bodu
% y .....vektor y-ovych souradnic bodu

X = ones(length(x),2);
X(:,2) = log(x);
Y = log(y);
P = (transpose(X)*X)\transpose(X)*Y;
C = exp(P(1));
p = P(2);
end
```

6. Navrhněte numerickou metodu, která využívá vašeho pozorování, že jedna z metod IE a EE přesné řešení podhodnocuje a druhá nadhodnocuje zhruba o stejnou hodnotu. Napište její schéma a implementujte ji. Znáte jméno této metody?
7. Udělejte tabulku, graf i odhad řádu konvergence pro vámi navrženou metodu obdobný tomu, který je požadovaný v bodu 1e). Na základě vašeho výpočtu zhruba určete kolik kroků bude potřebovat EE metoda k dosažení přesnosti vámi navržené metody (počet kroků = 320)

8. Vyřešte problém (1) takovou Runge-Kuttovou metodou druhého řádu, která nebyla prezentována na cvičeních. Uveďte její Butcherovu tabulku.
9. Vyřešte problém (1) pomocí matlabovské metody `ode23` s globální chybou 10^{-5} (použijte parametr metody `AbsTol`). Kolik potřebovala metoda `ode23` kroků k výpočtu? Pokuste se dosáhnout stejné přesnosti metodou EE nebo IE. Kolik kroků potřebovaly tyto metody?
10. Změňte zadanou rovnici na

$$\frac{dy(t)}{dt} = -30y(t) + q(t).$$

Nalezněte analytické řešení. Vyřešte metodou EE, IE na intervalu $(0, 4)$ se 40-ti kroky. Do jednoho obrázku vykreslete obě numerická řešení společně s analytickým řešením. Co je na řešení zajímavého? Pokuste se to vysvětlit. Zkuste zvyšovat počet kroků. Kolik kroků potřebuje metoda EE, aby se začala chovat "normálně"? Kolik kroků potřebuje metoda `ode45`? Která metoda implementovaná v Matlabu je na tento problém vhodná? Kolik potřebovala kroků?