

1. zápočtová písemka z Matematiky I (1M)

skupina A

K udělení zápočtu je nezbytné z této písemky získat alespoň 6 bodů.

1. [2.5 bodu] Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ -6 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Určete matici A^{-1} .
 - Najděte matici X , pro kterou platí $AX = B$.
 - Určete determinant a hodnotu matice A .
2. [1 bod] Určete determinant matice A , která je postupně po řádcích naplněna lichými čísly, tj.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 \end{pmatrix}.$$

3. [1 bod] Zvolte si dva libovolné různé nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ a určete

$$\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \right)^2 + \left(\frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \right)^2.$$

Bonus: Výsledek zdůvodněte.

4. [1.5 bodu] Určete rovnici roviny α , ve které leží bod C a přímka p .
 $C = [-1, -3, 4]$, $p : x = 3t, y = 1 - t, z = 5 + 5t, t \in \mathbb{R}$
5. [1 bod] Soustava lineárních rovnic je dána rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & p & 0 \end{array} \right).$$

Určete, pro která p má matice žádné, jedno a nekonečně mnoho řešení.

6. [2 body] Vyřešte soustavu lineárních rovnic pro neznámé a, b, c, d .

$$\begin{aligned} a + 2b - c + 2d + 1 &= 0 \\ -a + 1 - c &= 0 \\ -2a - 5b + 11c - 9d + 1 &= 0 \\ 3a + 5b + 2c + 2d + 3 &= 0 \end{aligned}$$

7. [3 body]

- Nechť je dána funkce $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Určete její definiční obor a nakreslete její graf. Dále určete funkci k ní inverzní $f^{-1}(x)$ a dokažte, že funkce $f(f^{-1}(x)) = x$.
- Nakreslete graf funkce $g_1(x) = 2 \cos \pi x$ a určete průsečíky s osami. Dále uveďte periodu funkce g_1 .
- Nakreslete grafy funkcí $g_2(x) = -|\ln x|$, $g_3(x) = \arcsin(1 - x)$ a $g_4(x) = \arcsin |1 - x|$.
- Určete definiční obor funkce $g_4(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

1. zápočtová písemka z Matematiky I (1M)

skupina B

K udělení zápočtu je nezbytné z této písemky získat alespoň 6 bodů.

1. [2.5 bodu] Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

- Určete matici B^{-1} .
- Najděte matici X , pro kterou platí $XB = A^T$.
- Určete determinant a hodnotu matice B .

2. [1 bod] Určete determinant matice A , která je postupně po řádcích naplněna sudými čísly, tj.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 18 & 20 & 22 & 24 \\ 26 & 28 & 30 & 32 \end{pmatrix}.$$

3. [1 bod] Zvolte si dva libovolné různé nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ a určete

$$\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \right)^2 + \left(\frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \right)^2.$$

Bonus: Výsledek zdůvodněte.

4. [1.5 bodu] Určete rovnici roviny α procházející body $A = [0, 2, 1]$, $B = [-1, 1, 1]$, $C = [-1, -3, 4]$.
5. [1 bod] Soustava lineárních rovnic je dána rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{array} \right).$$

Určete, pro která p má matice žádné, jedno a nekonečně mnoho řešení.

6. [2 body] Vyřešte soustavu lineárních rovnic pro neznámé a, b, c, d .

$$\begin{aligned} a + 2b - c + 2d + 1 &= 0 \\ -2a - 2b - 2d &= 0 \\ -a - 5b + 2c - 9d - 2 &= 0 \\ 2a + 3b - 3c - 2d + 1 &= 0 \end{aligned}$$

7. [3 body]

- Nechť je dána funkce $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$. Určete její definiční obor a nakreslete její graf. Dále určete funkci k ní inverzní $f^{-1}(x)$ a dokažte, že funkce $f(f^{-1}(x)) = x$.
- Nakreslete graf funkce $g_1(x) = 2 \ln \frac{x}{e}$ a v obrázku vyznačte alespoň dva body, kterými graf prochází.
- Nakreslete grafy funkcí $g_2(x) = -|\sin x|$, $g_3(x) = e^{(-2-x)}$ a $g_4(x) = e^{|-2-x|}$.
- Určete definiční obor funkce $g_4(x) = \arccos \ln x$.