Zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Skupina A

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [*4 b.*] Mějme dánu množinu $\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y - x^2 > 0,\ y > -2x+3,\ y < -2x+5,\ x > 0\right\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
   (c) Převeďte dvojný integrál
   $$\iint\limits_{\Omega} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
   na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

   Řešení:
   c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-2x+3}^{-2x+5} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^{-1+\sqrt{6}} \int_{x^2}^{-2x+5} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

2. [*4 b.*] Budiž dána množina $\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 < 4y,\ y - x > 0, x > 0\right\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Pomocí transformace do polárních souřadnic spočítejte dvojný integrál
   $$\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

   Řešení:
   b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\sin t} \frac{1}{\sin t} \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \pi$

3. [*4 b.*] Nechť $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 4x + y + 2z < 8,\ z > 2,\ x > 0,\ y > 0\right\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Převeďte trojný integrál $\iiint\limits_{\Omega} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

   Řešení:
   b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{4-4x} \int_2^{\frac{8-4x-y}{2}} 1 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

4. [*3 b.*] Určete hmotnost dutého válce o délce $h = 3\,\mathrm{m}$ s vnitřním poloměrem $r = 0.5\,\mathrm{m}$, vějším poloměrem $R = 1\,\mathrm{m}$ a hustotou $\rho = 2\ 000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. K výpočtu použijte transformaci trojného integrálu.

   Řešení:
   $4\ 500\,\pi\,\mathrm{kg}$

Zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Skupina B

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [*4 b.*] Mějme dánu množinu $\Omega = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \ ; y - x^2 > 0,\ y > 2x+1,\ y < 4,\ x < 0\big\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
   (c) Převeďte dvojný integrál
   $$\iint\limits_{\Omega} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
   na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

   Řešení:
   c) $\displaystyle\int_{-2}^{1-\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{1-\sqrt{2}}^{0} \int_{2x+1}^{4} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

2. [*4 b.*] Budiž dána množina $\Omega = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 < -6y,\ y + x < 0,\ y - x < 0\big\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Pomocí transformace do polárních souřadnic spočítejte dvojný integrál
   $$\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

   Řešení:
   b) $\displaystyle\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_{0}^{-6\sin t} 1 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t = 6\sqrt{2}$

3. [*4 b.*] Nechť $\Omega = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \ ; \ -3x - y + z < 6,\ -3x - y + z > 3,\ y + x < 4,\ x > 0,\ y > 0\big\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Převeďte trojný integrál $\iiint\limits_{\Omega} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

   Řešení:
   b) $\displaystyle\int_{0}^{4} \int_{0}^{4-x} \int_{3+3x+y}^{6+3x+y} 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

4. [*3 b.*] Určete hmotnost duté koule s vnitřním poloměrem $r = 1\,\mathrm{m}$, vějším poloměrem $R = 2\,\mathrm{m}$ a hustotou $\rho = 1\ 000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. K výpočtu použijte transformaci trojného integrálu.

   Řešení:
   $\frac{2\ 8000}{3}\pi\,\mathrm{kg}$

Zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Skupina C

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [*4 b.*] Mějme dánu množinu $\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \;; y - \sqrt{x} > 0,\ y < 2,\ \frac{x}{2} + y - \frac{3}{2} > 0,\ x > 0\right\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
   (c) Převeďte dvojný integrál
   $$\iint\limits_{\Omega} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
   na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

   Řešení:
   c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}^{2} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$

2. [*4 b.*] Určete hmotnost tenké desky ve tvaru osminy kruhu s poloměrem $r = 0.5\,\mathrm{m}$ a hustotou $\rho = 5\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$. K výpočtu použijte transformaci dvojného integrálu do polárních souřadnic.

   Řešení:
   $m = \frac{5}{32}\pi\,\mathrm{kg}$

3. [*3 b.*] Buďiž dána množina $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \;; y > x^2,\ 2x + 2y + z < 4,\ x > 0,\ z > 0\right\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Převeďte trojný integrál $\iiint\limits_{\Omega} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

   Řešení:
   b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{-x+2} \int_2^{4-2x-2y} 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

4. [*3 b.*] Buďiž dána množina $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \;; x^2 + y^2 + z^2 < 3,\ x < 0,\ y > 0\right\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Pomocí transformace souřadnic převeďte trojný integrál $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

   Řešení:
   b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\rho \cos\varphi \cos\vartheta} \rho^2 \cos\vartheta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi$

Zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Skupina D

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [*4 b.*] Mějme dánu množinu $\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \ ; y < \sqrt{x},\ x+y<2,\ y>0,\ x>\frac{1}{2}\right\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
   (c) Převeďte dvojný integrál
   $$\iint\limits_{\Omega} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
   na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

   Řešení:
   c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{\sqrt{x}} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}\int_{0}^{-x+2} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

2. [*4 b.*] Určete hmotnost tenké desky ve tvaru čtvrtiny mezikruží s vnitřním poloměrem $r = 0.75\,\mathrm{m}$, vějším poloměrem $R = 1\,\mathrm{m}$ a hustotou $\rho = 7\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$. K výpočtu použijte transformaci dvojného integrálu do polárních souřadnic.

   Řešení:
   $m = \frac{49}{64}\pi\,\mathrm{kg}$

3. [*3 b.*] Buďiž dána množina $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \ ; z > x^2,\ z < 9,\ 0 < y < 2\right\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Převeďte trojný integrál $\iiint\limits_{\Omega} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

   Řešení:
   b) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{9} 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

4. [*3 b.*] Buďiž dána množina $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \ ; x^2+y^2+z^2 < 4,\ z < 0\right\}$.
   (a) Nakreslete množinu Ω.
   (b) Pomocí transformace souřadnic převeďte trojný integrál $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.

   Řešení:
   b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{0}^{2} \frac{1}{\rho \sin\varphi \cos\vartheta}\rho^2 \cos\vartheta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi$