Zápočtová písemka z Matematiky IV (CA01, CA02, CA04)

Skupina A

Poznámky:

- *Výpočty provádějte* ***buď přesně, nebo s čísly zaokrouhlenými na 4 desetinná místa****.*
- *Všechny úhlové veličiny jsou v* ***radiánech****.*
- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [*5 b.*] Budiž dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 4x_1 \quad &- \quad x_3 \quad &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 \quad & \quad &= -1 \\ 2x_2 + 8x_3 \quad & \quad &= 0 \\ x_1 \quad & + 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

   (a) Ověřte podmínky konvergence Jacobiovy metody.

   (b) Touto metodou proveďte dvě iterace.

   Řešení:
   b) 1. iterace $\begin{bmatrix} 0.25 & -0.1667 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix}$, 2. iterace $\begin{bmatrix} 0.25 & -0.2917 & 0.0417 & 0.4375 \end{bmatrix}$.

2. [*9 b.*] Nechť je dána nelineární rovnice

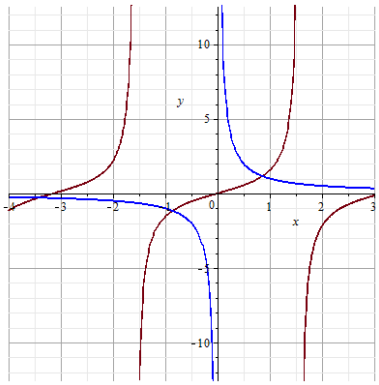
$$\operatorname{tg} x - \frac{1}{x} = 0$$

   (a) Grafickou metodou najděte počet kořenů.

   (b) Odhadněte interval, ve kterém leží **nejmenší kladný** kořen, a dále dokažte, že v tomto intervalu leží alespoň jeden kořen.

   (c) Metodou prosté iterace tento kořen najděte s přesností $\varepsilon = 0.1$. Ověřte všechny konvergenční podmínky!

   Řešení:



   Počet kořenů: nekonečno, kontrakce $F(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, přesné řešení $x = 0.8603335890$

3. [*6 b.*] Uvažujme naměřené hodnoty y_i v bodech x_i

x_i	0	1	2	2
y_i	2	2	5	6

   Metodou nejmenších čtverců naměřenými body proložte přímku. Vzniklý systém lineárních rovnic vyřešte Choleského metodou.

   Řešení:
$\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.0 \\ 15.0 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 3.0 & 1.6667 \\ 0.0 & 1.1055 \end{bmatrix}$, $y = 1.9091x + 1.3636$

Zápočtová písemka z Matematiky IV (CA01, CA02, CA04)

Skupina B

Poznámky:

- *Výpočty provádějte* ***buď přesně, nebo s čísly zaokrouhlenými na 4 desetinná místa****.*
- *Všechny úhlové veličiny jsou v* ***radiánech****.*
- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [*6 b.*] Budiž dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x+\ y &= -1 \\ -2x-\ y &= 1 \\ 4x+7y+2z &= -5 \end{aligned}$$

   (a) Dokažte, že tato soustava má právě jedno řešení.

   (b) Najděte toto řešení Gaussovou eliminační metodou s částečným výběrem hlavního prvku.

   Řešení:
   a) $x=0, y=-1, z=1$,
   $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & -5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & -5 \\ 0 & 5/2 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \approx$
   $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & -5 \\ 0 & 5/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & -3/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & -5 \\ 0 & 5/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$

2. [*9 b.*] Nechť je dána nelineární rovnice

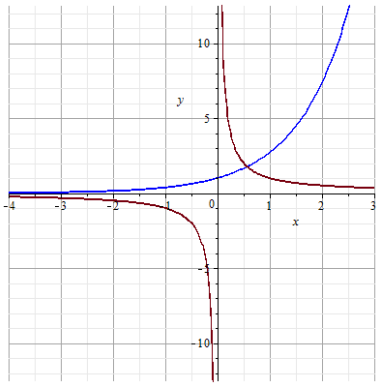
$$\frac{1}{x} - \mathrm{e}^x = 0$$

   (a) Grafickou metodou najděte počet kořenů,

   (b) dále odhadněte interval, ve kterém leží kořen, a dokažte, že v tomto intervalu leží alespoň jeden kořen.

   (c) Metodou prosté iterace tento kořen najděte s přesností $\varepsilon = 0.05$. Ověřte všechny konvergenční podmínky!

   Řešení:



   Počet kořenů: 1, kontrakce $F(x) = \mathrm{e}^{-x}$, přesné řešení $x = 0.5671432904$

3. [*5 b.*] Mějme dánu funkci $f(x) = \frac{1}{x}$

   a) Aproximujte ji Newtonovým interpolačním polynomem v uzlech $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3\ x_3 = 4$.

   b) Vypočtěte absolutní chybu aproximace v bodech $x = 3.5$.

   Řešení:
   a) $P_3(x) = 3/2 - 1/2\,x + 1/6\,(x-1)\,(x-2) - 1/24\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$,
   b) $e = 0.0111607143$.

Zápočtová písemka z Matematiky IV (CA01, CA02, CA04)

Skupina C

Poznámky:

- *Výpočty provádějte* ***buď přesně, nebo s čísly zaokrouhlenými na 4 desetinná místa****.*
- *Všechny úhlové veličiny jsou v* ***radiánech****.*
- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [*6 b.*] Budiž dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   a) Zjistěte, zda matice soustavy lineárních rovnic je symetricky pozitivně definitní, pokud ano, tak najděte její Cholevského rozklad a s jeho pomocí soustavu vyřešte.

   b) Spočítejte normy $\|b\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F$, kde A je matice soustavy lineárních rovnic a b vektor pravé strany.

Řešení:

a) $U = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, pomocný vektor $\begin{bmatrix} -4.0 \\ 4.0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$.

b)

2. [*8 b.*] Nechť je dána nelineární rovnice

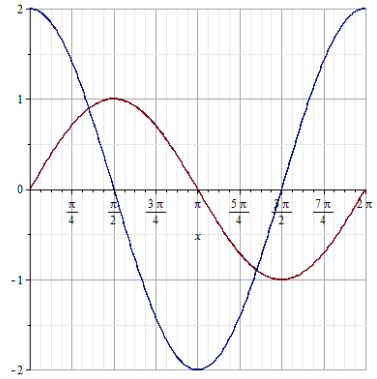
$$\sin x - 2\cos x = 0$$

   (a) Grafickou metodou najděte počet kořenů.

   (b) Odhadněte interval, ve kterém leží **druhý nejmenší kladný** kořen, a dále dokažte, že v tomto intervalu leží alespoň jeden kořen.

   (c) Newtonovou metodou tento kořen najděte s přesností $\varepsilon = 0.01$. Podmínky konvergence neověřujte.

Řešení:



Počet kořenů: nekonečně, přesné řešení $x = 4.248741371$.

3. [*6 b.*] Uvažujme naměřené hodnoty y_i v bodech x_i

x_i	-1	0	1	1
y_i	0	3	9	10

   a) Metodou nejmenších čtverců naměřenými body proložte parabolu. Vzniklý systém lineárních rovnic vyřešte Gaussovou eliminační metodou.

   b) Aproximujte hodnotu pro $x = 0.5$.

Řešení:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.0 \\ 19.0 \\ 22.0 \end{bmatrix}$$

$P_2(x) = 1.75x^2 + 4.25x + 3$

Zápočtová písemka z Matematiky IV (CA01, CA02, CA04)

Skupina D

Poznámky:

- *Výpočty provádějte* ***buď přesně, nebo s čísly zaokrouhlenými na 4 desetinná místa****.*
- *Všechny úhlové veličiny jsou v* ***radiánech****.*
- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [*6 b.*] Budiž dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} -2x + \ y \quad\quad &= -1 \\ 2x + 5y - 2z &= 0 \\ -\ y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

   (a) Ověřte podmínky konvergence Gaussovy-Seidelovy metody.

   (b) Najděte přibližné řešení soustavy pomocí této metody. Výpočet zastavte po dosažení přesnosti $\varepsilon = 0.2$, volte normu $\|\cdot\|_\infty$.

Řešení:

b) 1. iterace $\begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.2 \\ 0.45 \end{bmatrix}$, 2 iterace $\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.02 \\ 0.505 \end{bmatrix}$, 3. iterace $\begin{bmatrix} 0.51 \\ -0.002 \\ 0.4995 \end{bmatrix}$, přesné řešení $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.

2. [*9 b.*] Nechť je dána nelineární rovnice

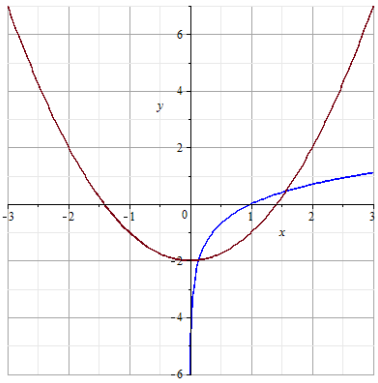
$$\ln x - x^2 + 2 = 0.$$

   (a) Grafickou metodou najděte počet kořenů.

   (b) Odhadněte interval, ve kterém leží **nejmenší kladný** kořen, a dále dokažte, že v tomto intervalu leží alespoň jeden kořen.

   (c) Metodou prosté iterace tento kořen najděte s přesností $\varepsilon = 0.01$. Ověřte všechny konvergenční podmínky!

Řešení:



Počet kořenů: 2, kontrakce $F(x) = \mathrm{e}^{x^2-2}$, přesné řešení $x = 0.1379348256$

3. [*5 b.*] Mějme dánu funkci $f(x) = -x^3 + 1$.

   a) Aproximujte ji Hermitovým interpolačním polynomem v uzlech $x_0 = 0,\ x_1 = 2$.

   b) Vypočtěte absolutní chybu aproximace v bodech 0, 1.5, 2. Vysvětlete.

Řešení:

a) $P_3(x) = 1 - 2\,x^2 - x^2\,(x-2)$,

b) $e = 0$.