

Funkce dvou proměnných - definiční obor a parciální derivace

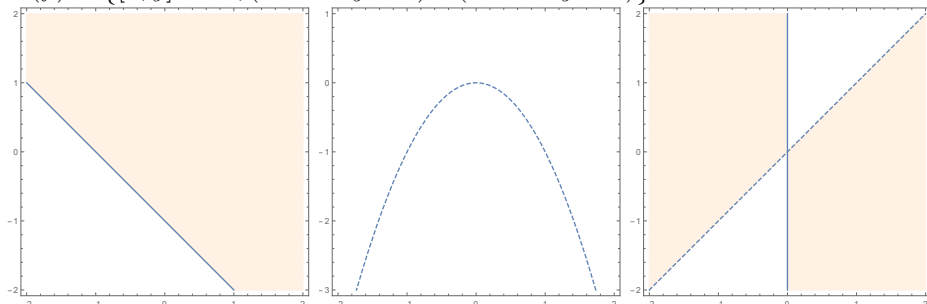
1 Náčrtněte a zapište definiční obor následujících funkcí

(a) $f(x, y) = \sqrt{y + x + 1}$

(b) $f(x, y) = \frac{y^2}{y + x^2}$

(c) $f(x, y) = \ln(x(x - y))$

Řešení: (a) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \geq -x - 1\}$, (b) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \neq -x^2\}$, (c) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x > 0 \wedge y < x) \vee (x < 0 \wedge y > x)\}$.



2 U následujících funkcí vypočítejte obě první parciální derivace

(a) $f(x, y) = -4x^2 + y^4 - x^5y^3 + 4$

(b) $f(x, y) = x^5 \ln(xy)$

(c) $f(x, y) = \frac{1-y}{x^2y^4}$

(d) $f(x, y) = \cos^2(5x) + \sin^2(3y)$

(e) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x} - 1)$

(f) $f(x, y) = x^y$

Nápověda: (b) při výpočtu f_x využijeme vzorec jak pro derivaci součinu, tak složené funkce; při f_y jen pro derivaci složené funkce, (c) při výpočtu f_x je výhodné si zadaný předpis upravit na tvar $f = (1-y)y^{-4}x^{-2}$ (lze derivovat i bez úpravy jako podíl); při výpočtu f_y derivujeme jako podíl, (d) v obou případech se jedná o derivaci složené funkce, (e) v proměnné x se jedná o složenou funkci, v proměnné y jde o konstantní funkci, *Řešení:* (a) $f_x = -8x - 5x^4y^3, f_y = 4y^3 - 3x^5y^2$, (b) $f_x = x^4(5 \ln(xy) + 1), f_y = \frac{x^5}{y}$, (c) $f_x = -\frac{2(1-y)}{x^3y^4}, f_y = \frac{-x^2y^4 - 4x^2y^3(1-y)}{x^4y^8}$, (d) $f_x = -10 \cos(5x) \sin(5x), f_y = 6 \cos(3y) \sin(3y)$, (e) $f_x = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}, f_y = 0$, (f) $f_x = yx^{y-1}, f_y = \ln(x)x^y$.

3 [Zill] Vypočítejte vyznačené parciální derivace

(a) $f(x, y) = 5x^2y^2 - 2xy^3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

(b) $f(x, y) = e^{xy}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(c) $f(x, y) = \frac{x^4}{y^2}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

Nápověda: (c) před výpočtem je výhodné si zadaný předpis upravit na tvar $f = x^4y^{-2}$ *Řešení:* (a) $f_{xy} = 20xy - 6y^2$, (b) $f_{xx} = y^2e^{xy}$, (c) $f_{yyy} = \frac{6x^4}{y^4}$.

4 Dokažte, že $f_{xy} = f_{yx}$ pro funkci $f(x, y) = \sin \frac{x}{y^2}$.

Nápověda: Jedním ze způsobů, jak dokázat požadovanou rovnost, je spočítat obě smíšené parciální derivace a ukázat, že výsledek je stejný. *Řešení:* $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2x}{y^5} \sin \frac{x}{y^2} - \frac{2}{y^2} \cos \frac{x}{y^2}$.

Literatura

[Zill] D. G. Zill and W.S. Wright. *Calculus: Early Transcendentals*. International series in mathematics. Jones & Bartlett Learning, 2009.