Aplikace určitého integrálu

1. Nechť je dán komolý rotační kužel s poloměrem podstav $r_1 = 4$, $r_2 = 2$ a výškou $h = 3$ Určete:

(a) objem kužele,

(b) povrch pláště,

(c) celkový povrch.

Řešení: (a) $V = 28\pi$, (b) $P_{pl} = 6\sqrt{13}\pi$, (c) $P_{celk} = (6\sqrt{13} + 20)\pi$.

2. Mějme dán rovinný obrazec ohraničený křivkami

$$y = 6x - x^2 \qquad \text{a} \qquad y = 0.$$

(1) Vypočtěte jeho obsah (odvážnější mohou zkusit spočítat i obvod).

(2) Vypočtěte souřadnice těžiště víte-li, že:

- (a) těleso je homogenní,
- (b) hustota tělesa je přímo úměrná x-ové souřadnici,
- (c) těleso se skládá ze dvou homogenních částí a hustota levé poloviny je dvakrát větší než hustota té pravé,
- (d) hustota tělesa je přímo úměrná vzdálenosti od počátku.
- (e) těleso se skládá ze dvou homogenních částí a jeho hustota nad přímkou $y = 5$ je $\sigma_1 = 3$, zbytek tělesa má hustotu $\sigma_2 = 5$.

Řešení: (1) $S = 36$, $L = 3\sqrt{37} + \frac{1}{2}\ln(6 + \sqrt{37})$, (2): (a) $T = [3, \frac{18}{5}] = [3, 3.6]$, (b) $T = [\frac{18}{5}, \frac{18}{5}] = [3.6, 3.6]$, (c) $T = [\frac{21}{8}, \frac{18}{5}] = [2.625, 3.6]$,
(d) + (e) kdo to vyřeší, získá velké plus ☺.

3. Asteroida je křivka dána parametrickými rovnicemi

$$x = a\cos^3 t,$$
$$y = a\sin^3 t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Určtete

(a) její délku,

(b) její těžiště,

(c) těžiště pravé horní čtvrtiny asteroidy.

Řešení: (a) $L = 6a$, (b) $[0, 0]$, (c) $\left[\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right]$.

4. Určete objem anuloidu a povrch anuloidové plochy. Anuloid přitom vznikne rotuje-li kolem osy x kružnice

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2, \quad a > r.$$

Řešení: $V = 2ar^2\pi^2$, $P = 4ar\pi^2$.

5. Pomocí určitého integrálu určete objem a povrch koule o poloměru r je-li tvořící půlkružnice dána:

(a) explicitně $y = \sqrt{r^2 - x^2}$,

(b) parametricky $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Řešení: $V = \frac{4}{3}\pi r^2$, $S = 4\pi r^2$.