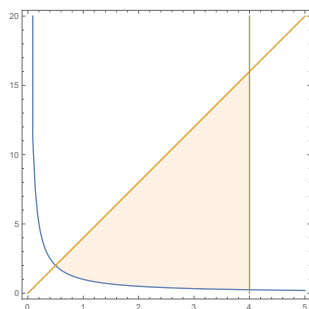


Aplikace určitého integrálu

1. Určete obsah plochy ohraničené křivkami $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x$, $x = 4$.

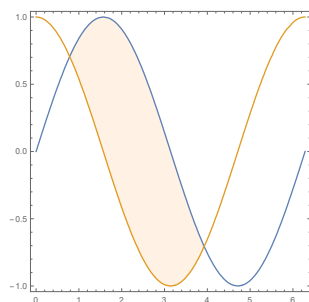
Nápověda:



Řešení: $\frac{63}{2} - 3 \ln x$

2. Mějme dány křivky $y = \cos x$, $y = \sin x$. Určete obsah plochy, která je jimi ohraničená a je mezi dvěma jejich průsečíky.

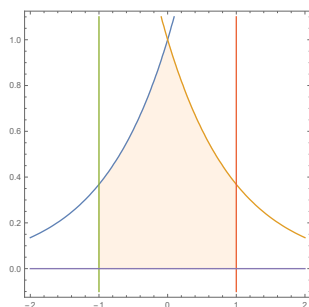
Nápověda:



Řešení: $2\sqrt{2}$

3. Určete obsah plochy ohraničené křivkami $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

Nápověda:



Řešení: $\frac{2(e-1)}{e}$

4. Načrtni křivky dané parametrickými rovnicemi

(a) $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$

(b) $x = 3 \sin t$, $y = 3 \cos t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$

(c) $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

(d) $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $t \in \langle 0, 4\pi \rangle$

Řešení: (a) horní půlkružnice se středem v počátku a $r = 2$, (b) pravá půlkružnice se středem v počátku $r = 3$, (c) pravá horní čtvrtina elipsy se středem v počátku, hlavní poloosa je ve směru osy y délky 3, vedlejší poloosa je ve směru osy x délky 2, (d) dva závitů levotočivé Archimedovy spirály.

5. Je dána křivka $x = -2t + 2$, $y = t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Vypočítejte povrch tělesa, které vznikne rotací této křivky kolem osy x . O jaké těleso se jedná? *Řešení:* $\pi\sqrt{5}$, rotační kužel.

6. [Zill] Uvažujme přímý prut, který splývá s osou x na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$. Určete souřadnice jeho těžiště, pokud jeho délková hustota je

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 2 & \text{pro } x \in \langle 2, 3 \rangle. \end{cases}$$

Nápověda: Funkce, která reprezentuje prut, má předpis $f(x) = 0$, $x \in \langle 0, 3 \rangle$.

Řešení: $[\frac{23}{12}, 0]$

7. Pomocí určitého integrálu odvoďte objem válce o poloměru $r = 2$ a výšce $h = 6$.

Nápověda: Křivka, jejíž rotací vznikne požadovaný válec, má rovnici $y = 2$, $x \in \langle 0, 6 \rangle$.

Řešení: 24π

Literatura

[Zill] D. G. Zill and W.S. Wright. *Calculus: Early Transcendentals*. International series in mathematics. Jones & Bartlett Learning, 2009.