

## Aplikace určitého integrálu

1. Určete obsah plochy ohraničené křivkami  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 4x$ ,  $x = 4$ . *Řešení:*  $\frac{63}{2} - 3 \ln x$
2. Mějme dány křivky  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ . Určete obsah plochy, která je jimi ohraničená a je mezi dvěma jejich průsečíky. *Řešení:*  $2\sqrt{2}$
3. Určete obsah plochy ohraničené křivkami  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ . *Řešení:*  $\frac{2(e-1)}{e}$
4. Načrtni křivky dané parametrickými rovnicemi
- (a)  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $t \in \langle 0, \pi \rangle$  (b)  $x = 3 \sin t$ ,  $y = 3 \cos t$ ,  $t \in \langle 0, \pi \rangle$
- (c)  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  (d)  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $t \in \langle 0, 4\pi \rangle$
- Řešení:* (a) horní půlkružnice se středem v počátku a  $r = 2$ , (b) pravá půlkružnice se středem v počátku  $r = 3$ , (c) pravá horní čtvrtina elipsy se středem v počátku, hlavní poloosa je ve směru osy  $y$  délky 3, vedlejší poloosa je ve směru osy  $x$  délky 2, (d) dva závitů levotočivé Archimedovy spirály.
5. Je dána křivka  $x = -2t + 2$ ,  $y = t$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ . Vypočítejte povrch tělesa, které vznikne rotací této křivky kolem osy  $x$ . O jaké těleso se jedná? *Řešení:*  $\pi\sqrt{5}$ , rotační kužel.
6. [Zill] Uvažujme přímý prut, který splývá s osou  $x$  na intervalu  $\langle 0, 3 \rangle$ . Určete souřadnice jeho těžiště, pokud jeho délková hustota je
- $$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 2 & \text{pro } x \in \langle 2, 3 \rangle. \end{cases}$$
- Řešení:*  $[\frac{23}{12}, 0]$
7. Pomocí určitého integrálu odvoďte objem válce o poloměru  $r = 2$  a výšce  $h = 6$ . *Řešení:*  $24\pi$

## Literatura

- [Zill] D. G. Zill and W.S. Wright. *Calculus: Early Transcendentals*. International series in mathematics. Jones & Bartlett Learning, 2009.