Integrování racionálních funkcí

Jak poznám racionální funkci? – podíl dvou polynomů

např.: $\dfrac{x^2}{2x^3+1}$ $\qquad$ $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ $\leftarrow$ není ryze racionální lomená

ryze racionální lomená

Jak je zintegrovat? – upravit na ryze rac. ~~lomenou~~ fce (tj. vydělit polynomy)
- rozložit na parc. zlomky
- každý parc. zlomek integrovat zvlášť

máme 4 typy parc. zlomků

Př.

$$R(x)=\frac{6x^7+15x^5-10x^4+25x^3-10x^2+2x+2}{(2x-1)^2(x^2-2x+3)(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{\overset{1}{A}}{2x-1}+\frac{\overset{1}{B}}{(2x-1)^2}+\frac{\overset{1}{C}x+\overset{2}{D}}{x^2-2x+3}+\frac{\overset{0}{E}x+\overset{0}{F}}{x^2+1}+\frac{\overset{1}{G}x+\overset{0}{H}}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{(2x-1)^2}+\frac{x+2}{x^2-2x+3}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

Spočítejme $\displaystyle\int R(x)\,dx=\int\frac{1}{2x-1}\,dx+\int\frac{1}{(2x-1)^2}\,dx+\int\frac{x+2}{x^2-2x+3}\,dx+$

$$+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Každý z předchozích integrálů je integrál z jiného typu parciálního zlomku. Vyřešíme každý zvlášť.

a) $\frac{A}{ax-b}$ ..... typ parciálního zlomku odpovídající reálnému kořenu jmenovatele

• 1. způsob – substituce

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x-1=t \\ 2\,dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}\,dx \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x-1| + c$$

• 2. způsob – vzorec $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f|+c$

$$\int\frac{1}{2x-1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{\overset{\to f'}{2}}{\underset{\to f}{2x-1}}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1|+c$$

b) $\frac{A}{(ax-b)^n}$ ... odpovídá vícenásobnému reálnému kořenu jmenovatele

$$\int\frac{1}{(2x-1)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x-1=t \\ 2\,dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{-2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-t^{-1}\right)+c = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}+c$$

c) $\frac{Ax+B}{\underbrace{ax^2+bx+c}_{D<0}}$ ... odpovídá dvěma komplexně sdruženým kořenům jmenovatele

$$\int\frac{x+2}{x^2-2x+3}\,dx = \int\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+3}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{\overset{\to f'}{2x-2}}{\underset{\to f}{x^2-2x+3}}\,dx + 3\int\frac{1}{x^2-2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+3| + 3\int\frac{1}{(x-1)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+3| + \frac{3}{2}\int\frac{1}{\frac{1}{2}(x-1)^2+1}\,dx$$

↳ doplnění na □

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+3| + \frac{3}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+3| + \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + c$$

d) $\frac{Ax+B}{(\underbrace{ax^2+bx+c}_{D<0})^n}$ ..... odpovídá vícenásobným komplexně sdruženým kořenům jmenovatele

..... příliš složité ..... neprobírá se .....

..... ale můžeme mít štěstí ☺

$$\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-2}\,dt = \frac{1}{2}\left(-t^{-1}\right)+c = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}+c$$