

Zkoušková písemka z předmětu Numerická a aplikovaná matematika

Ukázková písemka

Poznámky:

- Všechny výpočty ve všech příkladech provádějte s čísly zaokrouhlenými na **4 desetinná místa**
- Všechny úhlové veličiny jsou v **radiánech**.

1. [25 b.] Nechť je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned}x - y^3 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

- Určete počet kořenů.
- Pomocí **Newtonovy metody** najděte ten, který má největší y -ovou souřadnici. Pro vhodnou počáteční aproximaci proveďte první **dvě** iterace.
- Určete $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_2$, kde \mathbf{x}_k je aproximace řešení nalezená v k -té iteraci.

Řešení:

a) Dva kořeny, b) Výsledky závisí na zvolené počáteční aproximaci a konvergují k přesnému řešení $[\hat{x}, \hat{y}] \doteq [0.56362, 0.82603]$, c) výsledek závisí na zvolené počáteční aproximaci.

2. [20 b.] Mějme danu funkci $f(x) = \ln x$.

- Aproximujte funkci f interpolačním polynomem **druhého stupně** na intervalu $\langle 1, 5 \rangle$ s ekvidistantními uzly. Výsledný polynom uveďte v Newtonově tvaru.
- Použijte předchozí výsledek k aproximování hodnoty $\ln 2$. Jaká je chyba této aproximace?
- Jakou chybu by měla tatáž aproximace, pokud by byla funkce f na intervalu $\langle 1, 5 \rangle$ aproximována polynomem čtvrtého stupně (při ekvidistančních uzlech)?

Řešení:

a) $P_2(x) = 0.5493(x - 1) - 0.0735(x - 1)(x - 3.0)$, b) $P_2(2) = 0.6228$, $e = 0.0703$, c) 0.

3. [20 b.] Budiž dána okrajová úloha

$$\begin{aligned}-y'' + 2y &= 1 \quad \text{na } (1, 2), \\ y(1) &= 1, \\ y(2) &= 3.\end{aligned}$$

- Napište soustavu lineárních algebraických rovnic, které vzniknou při řešení úlohy **diferenční metodou** s krokem $h = 0.2$.

Řešení:

a)

$$\begin{bmatrix} 2.08 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.08 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.08 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.08 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 3.04 \end{bmatrix}$$

4. [15 b.]

- Napište postačující podmínky konvergence metody bisekce a vysvětlete princip metody.
- Funkce $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ má tři kořeny: $x = 1, x = 2, x = 3$. Kořeny hledejme metodou bisekce. Zvolme $a_1 < 1$ a $b_1 > 3$ a zároveň tak, že $x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$ není rovno 1, 2, nebo 3 pro žádné $k \geq 0$.
 - Je za těchto podmínek zaručena konvergence metody?
 - Metoda bisekce nikdy nebude konvergovat k některému (některým) z kořenů. Ke kterému (kterým)? Proč?

Řešení: