PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Základní pojmy

Řešení rovnice je hledání neznámé, která po dosazení do této rovnice vytvoří rovnost. V případě ODR byla neznámou funkce jedné proměnné — obvykle ji označujeme $y(x)$ ($u(x)$ nebo $x(t)$), v případě parciálních diferenciálních rovnic je neznámou funkce dvou, tří či více proměnných, obvykle ji označujeme $u(x,y)$, $u(x,y,z)$ nebo obecně $u(x_1,x_2,\ldots,x_N)$. V rovnici pak vystupuje tato neznámá a její derivace, v případě PDR jsou to derivace parciální, proto rovnici nazýváme *parciální diferenciální rovnice.* Řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje, se nazývá řádem rovnice.

Obecně tedy PDR řádu k můžeme zapsat ve tvaru

$$F\left(x_1,\ldots,x_N,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_N},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\ldots,\frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}\right)=0\,,$$

kde se do funkce F dosazují parciální derivace až do řádu k.

Řešení klasické a zobecněné

Bu Ω oblast v $\mathbb{R}^N$, na které bude definována neznámá funkce (řešení). Potom funkci $u(x)\equiv u(x_1,\ldots,x_N)$ nazveme (klasickým) *řešením* rovnice na oblasti Ω pokud:

(i) funkce u má pro každé x spojité všechny parciální derivace, které se v rovnici vyskytují,

(ii) funkce F je pro všechny tyto hodnoty definována (tj. řešení lze do rovnice dosadit) a

(iii) po dosazení u a jeho derivací dostáváme rovnost pro všechna $(x_1,\ldots,x_N)\in\Omega$.

Protože podmínka **(iii)** má smysl pouze pokud jsou splněny předchozí podmínky **(i)**, **(ii)**, často se tyto podmínky **(i)** **(ii)** neuvádějí. Toto řešení mající všechny derivace vystupující v rovnici spojité nazýváme *klasickým řešením.* V praxi se vyskytují i úlohy s nespojitými koeficienty, klasické řešení potom nemůže existovat. Proto se zavádí pojem *zobecněného řešení*, rovnice je splněna jenom v tzv. *zobecněném smyslu.*

Příklady PDR - rovnice prvního řádu

Uveme pár příkladů rovnic prvního řádu v rovině:

— konkrétní a obecná lineární rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty a,b

$$\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0\,,\qquad a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=c\,,$$

— konkrétní a obecná lineární rovnice prvního řádu s nekonstantními koeficienty

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0\,,\qquad a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)\,u=d(x,y)\,,$$

— kvazilineární (tj. lineární v nejvyšších (prvních) derivacích) a obecná rovnice prvního řádu

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u)\qquad F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\,.$$

Analogicky máme tyto rovnice i ve vyšší dimenzi, například lineární rovnice v dimenzi 3 (proměnné x, y, z) a obecně v dimenzi N (proměnné $x_1, \dots, x_N$):

$$a\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,\frac{\partial u}{\partial y} + c\,\frac{\partial u}{\partial z} + d\,u = f \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0\,u = f\,.$$

Rovnice druhého řádu, klasifikace

Nejdůležitějšími příklady rovnic druhého řádu v rovině jsou následující:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,, \tag{1}$$

které se po řadě nazývají Laplaceova, vlnová a difúze. Lineární rovnice s konstantními koeficienty se všemi možnými členy má tvar

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\,\frac{\partial u}{\partial x} + e\,\frac{\partial u}{\partial y} + f\,u = g\,. \tag{2}$$

Koeficienty a, b, c stojící u nejvyšších (druhých) derivací určují typ rovnice, členy s derivacemi nižšího řádu na klasifikaci nemají vliv. Uvažujme odpovídající kvadratickou formu Q (derivace podle x a y jsme nahradili násobky x a y)

$$Q(x, y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$$

a zkoumejme jakých hodnot tato forma nabývá v jednotlivých směrech. Označení $x/y = \lambda$ vede na kvadratickou rovnici

$$P(\lambda) \equiv a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0\,.$$

Počet řešení určuje diskriminant $D = b^2 - 4\,ac$. Rozlišíme 3 případy:

(H) jestliže $D = b^2 - 4\,ac > 0$, rovnice má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2. Kvadratická forma je tedy nulová ve dvou směrech $x = \lambda_1\,y$ a $x = \lambda_2\,y$ v ostatních směrech nabývá jak kladných tak záporných hodnot — forma je indefinitní. V tomto případě diferenciální rovnici nazýváme *hyperbolickou*. Základními příklady hyperbolické rovnice jsou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{nebo} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0\,. \tag{3}$$

(E) jestliže $D = b^2 - 4\,ac < 0$, rovnice nemá žádné reálné kořeny, kvadratická forma je nenulová ve všech směrech (mimo počátek) a nabývá proto bu všechny hodnoty kladné (nebo všechny záporné) — je pozitivně (nebo negativně) definitní. V tomto případě diferenciální rovnici nazveme *eliptickou*. Základním příkladem eliptické rovnice je tzv. Laplaceova rovnice

$$\Delta\,u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \tag{4}$$

levou stranu rovnice tvoří tzv. Laplacův operátor $\Delta\,u$

(P) zbývá případ $D = b^2 - 4\,ac = 0$. Rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen λ_{12}, kvadratická forma je nulová jen v jednom směru $x = \lambda_{12} y$ a v ostatních směrech nabývá bu všechny hodnoty kladné nebo všechny záporné — je tedy pozitivně (nebo negativně) semidefinitní. V tomto případě diferenciální rovnici nazveme *parabolickou*. Typických příkladem parabolické rovnice je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}\,. \tag{5}$$

Poznámka o názvech

Pokud v příslušné kvadratické formě položíme $Q(x, y) = 1$ v případě **(H)** dostáváme rovnici hyperboly, v případě **(E)** dostáváme rovnici elipsy nebo kružnice, případně musíme změnit znaménko $Q(x, y) = -1$. V případě **(P)** přidáním vhodného násobku $c_1 x + c_2 y$ dostáváme rovnici paraboly, například $x^2 - y = 0$.

Poznámka o transformacích a o kanonickém tvaru

Uvažujme pouze rovnici s nejvyššími derivacemi

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{6}$$

Lineární transformací souřadnic $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ určenou regulární maticí D ($\det(D) \neq 0$)

$$\xi = d_{11}x + d_{12}y \qquad \eta = d_{21}x + d_{22}y$$

diferenciální rovnice přejde na novou rovnici

$$a^*\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b^*\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + c^*\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0\,,$$

přičemž se znaménko diskrimantu $D = b^2 - 4\,ac$ nezmění, tj. typ rovnice se nezmění. U každého typu jsme uvedli jednoduchý příklad, tzv. kanonický tvar: pro eliptické rovnice je to (4), pro hyperbolickou rovnici jsou dokonce dva kanonické tvary (3). U kanonického tvaru pro parabolickou rovnici (5) jsme přidali člen s první derivací na pravou stranu, aby rovnice nedegenerovala na ODR.

Lze dokázat, že libovolnou rovnici (2) lze transformací souřadnic převést na příslušný kanonický tvar, přičemž na pravé straně mohou zbýt také nějaké členy s derivacemi nižších řádů a pravou stranou.

Rovnice druhého řádu ve vyšší dimenzi

Každé lineární rovnici druhého řádu

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} = f\left(x_1, \ldots, x_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \tag{7}$$

lze přiřadit příslušnou kvadratickou formu Q, která vznikne tím, že derivaci druhého řádu $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$ nahradíme $x_i x_j$. Rovnici (7) tedy přiřadíme formu

$$Q(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,x_i x_j\,. \tag{8}$$

Rovnici potom klasifikujeme podle definitnosti této formy. Pokud je forma pozitivně (nebo negativně) definitní, rovnici nazýváme *eliptickou.* Pokud je forma jenom semidefinitní, rovnici nazveme *parabolickou* a konečně, pokud je forma indefinitní, rovnici nazveme *hyperbolickou.* Tak v prostoru $\mathbb{R}^3$ máme kanonický tvar rovnice eliptické

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

kterou také nazýváme Laplaceovou, hyperbolická rovnice má kanonický tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u,$$

kde další proměnnou jsme označili t (často má význam času) a Δu je tzv. Laplaceův operátor v „prostorových" proměnných x, y, nebo x, y, z

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{9}$$

a podobně se stejným označením parabolická rovnice má kanonický tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u\,.$$

ROVNICE MATEMATICKÉ FYZIKY

Některým parciálním diferenciálním rovnicím se také říká *rovnice matematické fyziky.* Důvodem je skutečnost, že tyto rovnice byly odvozeny z fyzikálních principů a popisují (v určitém rozsahu a s určitou přesností) některé fyzikální děje.

Obvykle má neznámá jednu proměnnou t, která má význam času a jednu, dvě, nebo tři proměnné označované x, y, z nebo x_1, x_2, x_3 ve významu prostorových proměnných; v případě dvou proměnných je neznámou funkce $u(x,t)$ ve vyšší dimenzi potom $u(x,y,t)$ a $u(x,y,z,t)$ nebo $u(x_1,\ldots,x_N,t)$.

Rovnice vedení tepla v tyči

Uvažujme tyč ve směru osy x. Polohu bodu označuje proměnná x, čas proměnná t, hodnota neznámé $u(x,t)$ proto popisuje teplotu tyče v místě x a čase t. Tato funkce splňuje rovnici

$$c\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\,, \tag{10}$$

kde c je délkové měrné teplo; tj. množství tepla nutné ke zvýšení teploty tyče jednotkové délky o jeden stupeň a k tepelná vodivost tj. množství tepla, které proteče průřezem tyče za jednotku času. Funkce f má význam intenzity tepelných zdrojů. Při vhodné volbě jednotky délky a jednotky času v případě nepřítomnosti tepelných zdrojů dostáváme parabolickou rovnici v kanonickém tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Doplňující podmínky

Rovnice má nekonečně mnoho řešení. Abychom mohli spočítat teplotu v konkrétním případě, musíme rovnici doplnit podmínkami popisujícími situaci na začátku, v případě konečné tyče i na koncích. Dostáváme tak tzv. úlohu pro danou rovnici.

Formulace počáteční úlohy

Uvažujme tyč nekonečně dlouhou, tj. $x \in (-\infty, \infty)$ a situaci například od času $t = 0$. Potom rovnici (10) doplníme jednou počáteční podmínkou

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \tag{11}$$

která známou funkcí $u_0(x)$ popisujeme teplotu celé tyče v čase $t = 0$. Neznámou hledáme v polorovině tj. pro $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Počáteční úloha se tedy skládá z rovnice (10) a jedné počáteční podmínky (11).

Okrajová počáteční úloha

Při modelování reálných dějů se spíše setkáváme s konečnou tyčí, která má dva konce. Tyč popisuje proměnná x například na intervalu $(0, \ell)$. Proto kromě počáteční podmínky musíme uvést i okrajové podmínky charakterizující situaci na konci. Podmínka na konci $x = \ell$

$$u(\ell,t) = 0 \qquad [\quad u(\ell,t) = p(t) \quad] \tag{12}$$

znamená, že konec tyče má stále teplotu 0 [resp. $p(t)$], tj. konec tyče je dobře vodivě připojen k tělesu velké tepelné kapacity mající danou teplotu (například konec tyče je ponořen do směsi vody a ledu), nebo je tam termostat udržující předepsanou teplotu. Tato podmínka se nazývá *Dirichletova*.

Podmínka

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0 \qquad \left[\quad \frac{\partial u}{\partial n}(\ell,t) = q(t) \quad\right] \tag{13}$$

určuje (až na násobek k) tepelný tok v konci ℓ. Například nulový tepelný tok je v situaci, kdy je konec tyče tepelně izolován. Tato podmínka se nazývá *Neumanova*.

Okrajová počáteční úloha modelující vedení tepla pro $x \in (0, \ell)$ a $t > 0$ se skládá z rovnice (10), počáteční podmínky (11) a po jedné okrajové podmínce typu (12) nebo (13) v obou koncích tyče, přičemž na každém konci může být jiná podmínka. Například rovnici (10) s podmínkami

$$u(x,0) = 0 \quad x \in (0,\ell)\,, \qquad u(0,t) = 100\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0 \quad t > 0$$

popisuje situaci, kdy počáteční teplota je nulová (například tyč jsme vyjmuli ze směsi vody a ledu), konec $x = 0$ je ve vařící vodě a druhý konec $x = \ell$ je tepelně izolován.

Stacionární úloha

Lze uvažovat i úlohu pro ustálené vedení tepla, tj. situaci, kdy se teplota už v čase nemění, rovnice už neobsahuje proměnnou t. len $\partial u/\partial t$ vypadne, počáteční podmínka nemá smysl a dostáváme okrajovou úlohu pro ODR.

Rovnice vedení tepla ve vyšší dimenzi

Uvažujme těleso zabírající objem Ω. Potom vedení tepla v tomto tělese popisuje rovnice

$$c\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\Delta u\,, \tag{14}$$

kde Δu je Laplaceův operátor definovaný (9). V případě, že těleso je nehomogenní nebo materiál není izotropní člen Δu zaměníme výrazem

$$\sum_{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[k_{\alpha\beta}(x,y,z)\,\frac{\partial u}{\partial\beta}\right]$$

se symetrickou maticí koeficientů vodivosti $k_{\alpha,\beta}$.

Podobně jako v případě vedení tepla v tyči, rovnici doplníme jednou počáteční podmínkou v Ω a v čase $t = 0$ a jednou okrajovou podmínkou podél celého povrchu $\partial\Omega$. Podmínka může být typu (12), kdy na okraji předepisujeme teplotu $u = p$, nebo typu (13), kdy na okraji předepisujeme tepelný tok (v případě tepelně izolovaného povrchu podmínka zní $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ — derivace ve směru kolmém k povrchu je nulová). Přitom na části povrchu může být první uvedená podmínka a na zbytku povrchu druhá, tomuto případu říkáme smíšená úloha. Formulujeme tím okrajovou počáteční úlohu.

Rovnici (14) se také říká rovnice difúze, protože popisuje také difúzi (rozptylování) látky v nehybném prostředí, např. zrnko barviva v nehybné vodě; neznámá funkce pak má význam koncentrace látky.

Rovnice (10), (14) jsou základními příklady parabolické rovnice.

Rovnice kmitání struny

Uvažujme tenkou strunu napjatou podél osy x. Neznámá $u(x,t)$ popisuje příčnou výchylku struny v místě x a čase t. Potom kmitání této struny popisuje rovnice

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\,, \tag{15}$$

kde ρ je hustota (hmotnost) struny, T napětí struny a f případné známé vnější zatížení (např. gravitace). Homogenní rovnice se často zapisuje ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{16}$$

protože řešením rovnice lze interpretovat součet vlny, která postupuje rychlostí c po struně doprava $u(x,t) = F(x-ct)$ a vlny postupující stejnou rychlostí c po struně doleva $u(x,t) =$

$G(x+ct)$. Rovnice (16) popisuje také podélné kmity tenké tyče a kmitání vzduchového sloupce v píšťale.

Doplňující podmínky

Samotné rovnici vyhovuje nekonečně mnoho řešení, proto musíme rovnici doplnit podmínkami určujícími stav v počátečním čase např. $t = 0$, tj. určit počáteční výchylku u_0 a počáteční rychlost u_1 (na rozdíl od předchozí úlohy jsou zde **dvě** počáteční podmínky):

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)\,. \tag{17}$$

V případě konečné struny musíme doplnit i okrajové podmínky, podobně jako u rovnice vedení tepla. Podmínka (12) určuje výchylku struny na konci, podmínka (13) pak zatížení struny na konci; $\partial u/\partial x(\ell,t) = 0$ znamená, že na konec $x = \ell$ nepůsobí žádná síla — jedná se o volný konec.

Například rovnice (15) s podmínkami

$$u(x,0) = 0.1\,x(\ell - x)\,, \qquad u(0,t) = 0\,, \quad u(\ell,t) = 0$$

popisuje kmitání struny upevněné na koncích, která má na začátku výchylku ve tvaru paraboly. Je to *počáteční okrajová úloha.* Lze formulovat i počáteční úlohu modelující kmitání nekonečné struny: rovnici (15) na $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ doplníme dvěma počátečními podmínkami (17).

Vlnová rovnice

Rovnice (15) popisuje šíření vln podél struny, nazývá se také jednorozměrná vlnová rovnice. Vícerozměrná vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\Delta u \tag{18}$$

s Laplaceovým operátorem (9) popisuje šíření vln v rovině (například kmitání tenké membrány, kmitání rovinné mýdlové bubliny, šíření vln na vodní hladině), nebo v prostoru (například šíření zvukových vln v prostoru, šíření elektromagnetických vln).

Pro vlnovou rovnici lze analogicky formulovat počáteční okrajovou úlohu pro kmity v objemu Ω nebo počáteční úlohu pro kmitání celého prostoru (obě mají dvě počáteční podmínky (17)).

Vlnové rovnice (16), (18) jsou hyperbolické rovnice.

Rovnice pro ustálené jevy

V probíraných jevech lze hledat ustálený stav. Už jsme se zmínili o stacionárním řešení rovnice vedení tepla, kdy se z parabolické rovnice stala rovnice eliptická (případně ODR). V stacionárním případě se kmitání struny nebo membrány mění na deformaci (průhyb) struny nebo membrány, hyperbolická rovnice přejde na rovnici eliptickou v dimenzi o jedno nižší (případně ODR).

V úlohách pro ustálený stav koeficienty, pravá strana ani okrajové podmínky nezávisí na čase t, z rovnice vypadne člen s derivací podle t. Počáteční podmínky vypadnou, zůstanou jen podmínky okrajové.

NĚKTERÉ METODY ŘEŠENÍ PDR

Řešení jednorozměrné vlnové rovnice

Jednorozměrnou vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

lze fyzikálně interpretovat jako rovnici kmitání struny. Rovnici transformací $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ převedeme na rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0\,.$$

Integrací získáme obecné řešení $u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$, kde F a G jsou libovolné diferencovatelné funkce. Zpětnou substitucí za ξ a η dostáváme obecné řešení naší vlnové rovnice

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Snadno lze vidět, že toto řešení je součtem „vlny“ postupující stálou rychlostí c doprava $u(x,t) = F(x - ct)$ a „vlny“ postupující rychlostí c doleva $u(x,t) = G(x + ct)$.

Rovnici doplníme-li dvěma počátečními podmínkami:

$u(x,0) = \varphi(x)$ — zadaná počáteční poloha
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ — zadaná počáteční rychlost

a jednou z uvedených okrajových podmínek na konci $x = 0$ v případě rovnice na polopřímce $x \in (0, \infty)$ nebo po jedné okrajové podmínce na obou koncích $x = 0$ a $x = \ell$ v případě rovnice na úsečce $(0, \ell)$. Dosazením obecného řešení do těchto podmínek dostáváme rovnice, z kterých můžeme určit funkce F a G a tím spočítat obecné řešení $u(x,t)$.

Fourierova metoda řad

Tato metoda umožňuje spočítat řešení počáteční okrajové úlohy pro parabolickou i hyperbolickou rovnici. Řešení vyjde ve tvaru Fourierovy řady, odtud název metoda řad a Fourierova metoda. Protože funkce hledáme ve tvaru se separovanými proměnnými, metodě se říká i metoda separace proměnných.

Řešení parabolické rovnice

Uvažujme například parabolickou rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pro $x \in (0, \pi), t \in (0, \infty)$ doplněnou podmínkami

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in (0,\pi), \qquad u(0,t) = 0\,, \quad u(\pi,t) = 0 \quad t \in (0,\infty).$$

Úlohu lze interpretovat například jako rovnici vedení tepla v tenké na povrchu izolované tyči o počáteční teplotě $\varphi(x)$, jejíž konce $x = 0$ a $x = \pi$ jsou ponořeny nádobě se směsí vodu a ledu.

Řešení budeme hledat ve tvaru řady:

$$u(x,t) = \sum_n c_n v_n(x,t)$$

kde pomocné funkce $v_n(x,t)$ volíme tak, aby splňovaly uvažovanou rovnici a okrajové podmínky:

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\,, \qquad v_n(0,t) = 0\,, \quad v_n(\pi,t) = 0.$$

Každá jejich lineární kombinace bude potom také splňovat rovnici a tyto okrajové podmínky. Vhodnou volbou koeficientů c_n můžeme dosáhnout i splnění počáteční podmínky.

Pomocnou funkci $v(x,t)$ hledáme ve tvaru se separovanými proměnnými $v(x,t) = X(x)\,T(t)$. Derivováním a dosazením do příslušných rovnic dostáváme $X\,T' = \kappa X''\,T$, odkud vydělením κXT máme

$$\frac{T'(t)}{\kappa T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Zřejmě levá strana nezávisí na proměnné x a pravá zase nezávisí na t, proto obě strany jsou rovny nějaké konstantě, kterou označíme $-\lambda$. Dostáváme tak dvě rovnice

$$T' + \kappa\lambda T = 0\,, \qquad X'' + \lambda X = 0$$

které mají obecná řešení

$$T(t) = c\,e^{-\kappa\lambda t}\,, \qquad X(x) = a\,\cos(\mu x) + b\,\sin(\mu x)$$

s $\mu^2 = \lambda$. Z okrajových podmínek pro v plynou okrajové podmínky pro X ve tvaru $X(0) = 0$ a $X(\pi) = 0$. Hledáme netriviální řešení $X(x)$. Dosazením do první podmínky dostáváme $X(0) = a\,\cos 0 = 0$ odkud plyne $a = 0$. Z druhé podmínky máme $X(\pi) = b\,\sin(\mu\pi) = 0$. Protože rovnici $\sin x = 0$ vyhovují pouze celé násobky π, netriviální řešení dostáváme v případě $\mu\pi = n\pi$, kde n je celé číslo. Máme proto posloupnost řešení a příslušných λ, která označíme indexem n a

$$X_n(x) = \sin(nx) \qquad \lambda_n = n^2\,.$$

Protože pro $n = 0$ je $\sin(0x) = 0$ a pro n záporná nedostáváme nové funkce, budeme brát pouze členy s přirozenými čísly $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Řešení $X_n(x) = \sin(nx)$ odpovídá $T_n(t) = \exp(-\kappa n^2 t)$. Dostáváme tak pomocné funkce v_n a tím i řešení $u(x,t)$ ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\sin(nx)\,e^{-\kappa n^2 t}\,.$$

Ve vyjádření řešení zbývá určit koeficienty c_n. Dosadíme do počáteční podmínky $u(x,0) = \varphi(t)$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = \varphi(x)\,.$$

Z rovnosti je vidět, že potřebujeme rozvinout funkci $\varphi(x)$ na $(0,\pi)$ do sinusové řady. Z teorie Fourierových řad plyne vzorec pro výpočet koeficientů

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože jsme dostali řešení ve tvaru nekonečné řady, nutno se také zabývat konvergencí této řady. V tomto případě parabolické rovnice pro $t = 0$ zajišťuje konvergenci teorie Fourierových řad, pro $t > 0$ člen $\exp(-\kappa n^2 t)$ konverguje velmi rychle k nule pro n jdoucí do nekonečna a tím zajišťuje konvergenci celé řady i pro $t > 0$.

Poznámky: Zřejmě lze řešit rovnici i na libovolném omezeném intervalu $(0,\ell)$ nebo (a,b), místo $\sin(nx)$ dostáváme v prvém případě $\sin(n\pi x/\ell)$; dále místo Dirichletovy podmínky $u(0,t) = 0$ můžeme uvažovat Neumanovu podmínku $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$. Například v případě Neumanovy podmínky v obou koncích $x = 0$ a $x = \pi$ okrajové podmínky určí posloupnost $X_n(x) = \cos(nx)$ pro $n = 0,1,2,3,\ldots$

Nehomogenní úlohy

V případě rovnice s pravou stranou a nehomogenními okrajovými podmínkami například

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g \qquad u(\ell,t) = \nu\,,$$

najdeme libovolnou funkci $u_0(x,t)$ splňující rovnici s pravou stranou a uvedené okrajové podmínky. Obvykle tuto funkci nalezneme ve tvaru polynomu podle tvaru funkcí f, g, ν, pokud jsou všechny konstanty, funkci u_0 můžeme hledat ve tvaru polynomu druhého stupně v x: $u_0(x,t) = a_1x^2 + a_2x + a_3$. Například pro $f = 2\text{konst.}$, $g = 0$ a $\nu = 0$ vyjde $u_0(x,t) = \pi^2 - x^2$.

Řešení pak hledáme ve tvaru

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u^*(x,t)\,,$$

kde funkce $u^*(x,t)$ má splňovat už rovnici bez pravé strany f s homogenními okrajovými podmínkami $\frac{\partial u^*}{\partial x}(0,t) = 0$ a $u^*(\ell,t) = 0$, lze ji proto najít uvedenou Fourierovou metodou řad. Pozor, počáteční podmínka pro $u^*(x,t)$ je opravená o pomocnou funkci $u_0(x,t)$

$$u^*(x,0) = \varphi(x) - u_0(x,0)\,.$$

Řešení hyperbolické rovnice

Uvažujme hyperbolickou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pro $x \in (0,\pi), t \in (0,\infty)$ doplněnou podmínkami

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \quad x \in (0,\pi),$$

$$u(0,t) = 0\,, \quad u(\pi,t) = 0 \quad t \in (0,\infty).$$

Úlohu lze interpretovat například jako rovnici kmitání tenké struny upevněné na obou koncích.

Opět řešení hledáme ve tvaru řady:

$$u(x,t) = \sum_n c_n v_n(x,t)\,,$$

kde pomocné funkce $v_n(x,t)$ volíme tak, aby splňovaly homogenní rovnici a homogenní okrajové podmínky

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\,, \qquad v_n(0,t) = 0\,, \qquad v_n(\pi,t) = 0\,.$$

Pomocnou funkci $v(x,t)$ hledáme opět ve tvaru $v(x,t) = X(x)\,T(t)$. Dosadíme do příslušných rovnic a vydělením c^2XT máme

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Protože levá strana nezávisí na proměnné x a pravá zase nezávisí na t, obě strany jsou rovny nějaké konstantě, kterou označíme $-\lambda$. Dostáváme tak dvě rovnice

$$T'' + c^2\lambda T = 0\,, \qquad X'' + \lambda X = 0\,,$$

které mají obecná řešení

$$T(t) = a\,\cos(\mu ct) + b\,\sin(\mu ct)\,, \qquad X(x) = A\,\cos(\mu x) + B\,\sin(\mu x)\,,$$

kde $\mu^2 = \lambda$. Jako v předchozí parabolické úloze z okrajových podmínek plyne $X(0) = 0$ a $X(\pi) = 0$ odkud plyne

$$X_n(x) = \sin(nx) \qquad \lambda_n = n^2 \text{ pro } n = 1,2,3,\ldots.$$

Dostáváme tak pomocné funkce v_n a tím i řešení $u(x,t)$ ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\,[a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)]\,.$$

Ve vyjádření řešení zbývá určit koeficienty a_n a b_n. Dosazením do počáteční podmínky $u(x,0) = \varphi(x)$ dostáváme

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = \varphi(x);$$

potřebujeme rozvinout funkci $\varphi(x)$ na $(0,\pi)$ do sinusové řady. Koeficienty lze spočítat pomocí vzorce vzorce

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dosazením do druhé počáteční podmínky $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ dostáváme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc\sin(nx) = \psi(x);$$

zde rozvíjíme funkci $\psi(x)$ do sinusové řady s koeficienty dány vzorci

$$b_n = \frac{2}{nc\pi}\int_0^\pi \psi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože jsme dostali řešení ve tvaru nekonečné řady, nutno se také zabývat konvergencí této řady. V tomto případě hyperbolické rovnice konvergence závisí na hladkosti funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, většinou konverguje jenom řada pro $u(x,t)$, její derivace už často nekonvergují, řešení potom bereme v zobecněném smyslu.

Opět možno řešit rovnici na intervalu $(0,\ell)$ nebo (a,b), nebo s jinými okrajovými podmínkami. Podobně lze řešit parabolické i hyperbolické rovnice na vhodných oblastech, např. čtverec, obdélník, krychle.