

Ukázkové příklady z předmětu Aplikované matematiky (CA057)

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení.*

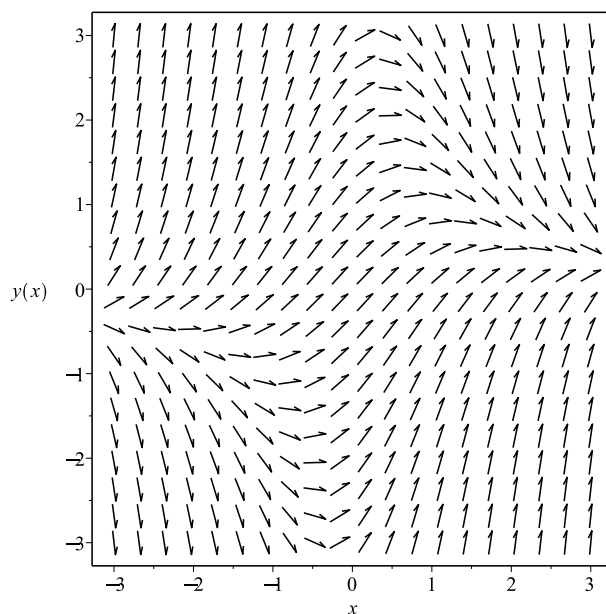
1. [ODR1 - Existence a jednoznačnost řešení] Rozhodněte zda rovnice $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ má jediné řešení procházející bodem $[x_0, y_0]$:

- a) $[x_0, y_0] = [-1, 1]$,
- b) $[x_0, y_0] = [5, 3]$,
- c) $[x_0, y_0] = [2, 4]$.

Řešení:

- a) Tímto bodem neprochází žádné řešení.
- b) Tímto bodem prochází řešení, ale Picardova věta nezaručuje, že je jediné.
- c) Tímto bodem prochází jediné řešení.

2. [ODR1 - Směrové pole] Na obrázku je směrové pole rovnice $y' = 1 - xy$.



- a) Do obrázku načrtněte izoklíny pro sklony $m = -1$, $m = 0$ a $m = 1$.
- b) Jedno z řešení rovnice má v bodě $x = \frac{1}{2}$ lokální extrém. Co můžeme říct o $y(\frac{1}{2})$?
- c) Je tento lokální extrém minimum či maximum? Ověřte výpočtem.

Řešení:

- b) $y(\frac{1}{2}) = 2$.
- c) Lokální maximum.

3. [ODR1 - Autonomní rovnice] Uvažujme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = y^3 - y.$$

- a) Načrtněte fázový portrét. Vyznačte všechny kritické body. Určete zda jsou asymptoticky stabilní, nestabilní či semistabilní.
- b) Načrtněte několik řešení této rovnice.
- c) Určete, kde se nacházejí inflexní body řešení.

Řešení:

c) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. [ODR1 - Metoda separace proměnných] Vyřešte počáteční problém

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{2y},$$

$$y(-2) = -1.$$

Řešení:

$$y(x) = -\sqrt{x^2 + x - 1}.$$

5. [ODR1 - Lineární rovnice] Vyřešte počáteční problém

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x},$$

$$y(0) = 4.$$

Řešení:

$$y(x) = \frac{x^2+4}{e^x(x+1)}.$$

6. [ODR1 - Metoda substituce] Vyřešte rovnici

$$\frac{dy}{dx} = (x+y+1)^2.$$

K řešení použijte substituci $u = x + y + 1$.

Řešení:

$$y = \operatorname{tg}(x+c) - x - 1.$$

7. [Lineární nezávislost] Rozhodněte, zda je množina funkcí $f_1(x) = 1+x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ lineárně závislá či nezávislá na $(-\infty, \infty)$.

Řešení:

Lineárně nezávislá.

8. [Fundamentální systém řešení] Rozhodněte, zda je množina funkcí $f_1(x) = e^{-3x}$, $f_2(x) = e^{4x}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $y'' - y' - 12y = 0$ na $(-\infty, \infty)$.

Řešení:
Ano, tvoří.

9. [LODRn - Princip superpozice a struktura řešení] Předpokládejme, že $\cos x$ a x jsou řešením rovnice

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

pro konkrétní funkce $a(x), b(x), c(x), f(x)$.

- a) Najděte řešení přidružené homogenní rovnice.
- b) Najděte řešení zadané rovnice, pro které platí $y(0) = 2$.

Řešení:

- a) $c(\cos x - x)$.
- b) $2 \cos x - x$.

10. [LODRn - Homogenní rovnice s konstantními koeficienty] Nalezněte obecné řešení rovnice

$$16y^{(4)} + 24y'' + 9y = 0.$$

Řešení:

$$y = c_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c_3 x \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c_4 x \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right).$$

11. [LODRn - Metoda variace konstant] Rovnici $y'' + y = \cos^2 x$ vyřešte metodou variace konstant.

Řešení:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x.$$

12. [LODRn - Metoda neurčitých koeficientů] Rovnici

$$y'' + 2y' + y = \sin x + 3 \cos 2x$$

vyřešte metodou neurčitých koeficientů.

Řešení:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{12}{25} \sin 2x - \frac{9}{25} \cos 2x.$$

13. [LODRn - Řešení ve formě řad] Vyřešte následující počáteční problém (řešení hledejte ve formě nekonečné mocninné řady):

$$\begin{aligned} y'' - x^3 y &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= -2. \end{aligned}$$

Řešení:
 $y = -2 \left(x + \frac{x^6}{5 \cdot 6} + \frac{x^{11}}{5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 11} + \frac{x^{16}}{5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 16} + \dots \right).$

14. [LODR2 - Greenova funkce] Mějme dán okrajový problém

$$\begin{aligned} y'' + 9y &= 1, \\ y(0) &= 0, \\ y'(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

- a) Nalezněte Greenovu funkci pro tento problém.
b) Vyřešte jej.

Řešení:

a)

$$G(x, t) = \begin{cases} -\frac{\sin 3t \cos 3x}{3} & t \in (0, x), \\ -\frac{\sin 3x \cos 3t}{3} & t \in (x, \pi). \end{cases}$$

b) $\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \cos 3x.$

15. [LODR2 - Zobecněná řešení] Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} y'' + 2y &= 1, \\ y(0) &= 0, \\ y(1) &= 0. \end{aligned}$$

- a) Napište její slabou formulaci.
b) Napište její variační formulaci.

Řešení:

a) Najděte $y \in W^{1,2}(0, 1)$ takové, že $y(0) = y(1) = 0$ a

$$-\int_0^1 y' v' dx + 2 \int_0^1 y v dx = \int_0^1 v dx, \quad \forall v \in W^{1,2}(0, 1), v(0) = v(1) = 0.$$

b) Najděte $y \in W^{1,2}(0, 1)$ takové, že $y(0) = y(1) = 0$ a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^1 (y')^2 dx + \int_0^1 y^2 dx - \int_0^1 y dx &\leq \\ &\leq -\frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 dx + \int_0^1 v^2 dx - \int_0^1 v dx, \quad \forall v \in W^{1,2}(0, 1), v(0) = v(1) = 0. \end{aligned}$$

16. [Soustavy ODRn - Eliminační metoda] Eliminační metodou vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 + 5x, \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 + 8e^x. \end{aligned}$$

Řešení:

$$y_1 = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} + 2x - \frac{13}{5} - 3e^x, \quad y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} - 3x + \frac{12}{5} + e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

17. [Soustavy ODRn] Převed'te počáteční úlohu

$$y^{(4)} - 2xy + (y'')^2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0$$

na počáteční úlohu pro soustavu rovnic prvního řádu.

Řešení:

$$y'_1 = y_2, y'_2 = y_3, y'_3 = y_4, y'_4 = 2x y_1 - y_3, y_1(0) = 2, y_2(0) = -1, y_3(0) = 1, y_4(0) = 0.$$

Souvislost řešení původní úlohy s řešením soustavy je tato: $y_1 = y$.

18. [PDR - Klasifikace rovnic] Rozhodněte, zda rovnice

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 0.3 \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

je hyperbolická, parabolická či eliptická.

Řešení:

Eliptická.

19. [Fourierovy řady] Rozložte funkci $f(x) = -x(x - \pi)$ na intervalu $(0, \pi)$ do sinové Fourierovy řady (tj. úplný ortogonální systém je množina funkcí $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$).

Řešení:

$$f(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{8}{\pi n^3} \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi (2n-1)^3} \sin((2n-1)x).$$

20. [PDR - Fourierova metoda (metoda separace proměnných)] Metodou separace proměnných najděte řešení úlohy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x &\in (0, \pi), t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) &= -x(x - \pi), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(\pi, t) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení:

$$u(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{8}{\pi n^3} \sin(nx) \cos(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi (2n-1)^3} \sin((2n-1)x) \cos((2n-1)t).$$

21. [PDR - Rovnice matematické fyziky] Uvažujme tenkou tyči délky l m, která je na svém povrchu izolovaná. Víme, že v materiálu nevzniká žádné dodatečné teplo. Teplota celé tyče v čase $t = 0$ je 10°C , jeden její konec je teplotně izolovaný a druhý je udržován na konstantní teplotě 20°C . Materiálové konstanty volte rovny jedné.

- Formulujte rovnici popisující vedení tepla v tenké tyči. Doplněte ji o počáteční a okrajové podmínky.
- Rozhodněte, zda okrajové podmínky jsou Dirichletovy, Neumannovy (Robinovy) či Newtonovy a také zda se jsou homogenní či nehomogenní.
- Napište rovnici a podmínky popisující ustálené (v čase neměnné) vedení tepla.

Řešení:

- $u_t' = u_{xx}''$ pro $x \in (0, l)$, $t \in (0, \infty)$, $u(x, 0) = 10$, $u(0, t) = 20$, $u_x'(l, t) = 0$.
- pro $x = 0$ nehomogenní Dirichletova, pro $x = l$ homogenní Neumannova.
- $u_{xx}'' = 0$ pro $x \in (0, l)$, $u(0, t) = 20$, $u_x'(l, t) = 0$.

22. [Laplaceova transformace] Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t$.

Řešení:

$$F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

23. [Laplaceova transformace - LODRn] Pomocí Laplaceovy transformace najděte řešení počátečního problému

$$\begin{aligned} y'' - 9y &= 2 - t, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Řešení:

$$y = \frac{1}{27}(-6 + 3t + 7e^{3t} - e^{-3t}).$$

24. [Laplaceova transformace - soustavy ODRn] Pomocí Laplaceovy transformace najděte řešení počátečního problému

$$\begin{aligned} y_1'' + 7y_2' + 8y_1 &= 0, \\ y_2'' - y_1' + 2y_2 &= 0, \\ y_1(0) &= 1, \\ y_1'(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, \\ y_2'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení:

$$y_1 = \frac{7}{15} \cos 4t + \frac{8}{15} \cos t, \quad y_2 = \frac{2}{15} \sin 4t - \frac{8}{15} \sin t.$$

25. [Numerické metody - Eulerovy metody] Mějme počáteční problém

$$\begin{aligned}y' &= 2xy, \\ y(1) &= 1.\end{aligned}$$

Použijte dva kroky explicitní Eulerovy metody k přibližnému určení hodnoty $y(2)$.

Řešení:

$$y(2) = 5.$$

26. [Numerické metody - Galerkinova metoda] Galerkinovou metodou najděte aproximaci řešení okrajové úlohy

$$\begin{aligned}y'' + 2y &= 1, \\ y(0) &= 0, \\ y(1) &= 0.\end{aligned}$$

Za báze i testovací funkce volte $\varphi_1 = x(x-1)$, $\varphi_2 = x^2(x-1)^2$.

Řešení:

$$y \approx 0.6041 \varphi_1 - 0.1066 \varphi_2.$$

27. [Aplikace - Radioaktivní rozpad] Rychlost rozpadu prvku ^{14}C je přímo úměrná jeho množství. Poločas rozpadu (tj. doba, za kterou se rozpadne právě polovina jeho původního množství) je 5 730 let.

a) Popište tento děj diferenciální rovnicí.

b) Určete, kolik procent z původního množství se rozpadne za 200 let.

Řešení:

a) $y' = -\frac{\ln 2}{5730} y$.

b) 2.39%.

28. [Aplikace - Populační modely] V jezeře žije populace ryb, která se rozmnožuje rychlostí přímo úměrnou její velikosti. Pravidelně jsou ryby v jezeře loveny konstantní mírou r .

a) Popište tuto situaci diferenciální rovnicí. V rovnici se budou vyskytovat parametry, jejichž hodnota není v zadání určena.

b) Jak velká musí být populace ryb, aby vlivem rybolovu nevymírala? Náповěda: uvědomte si, že diferenciální rovnice je autonomní.

Řešení:

a) $y' = cy - r$.

b) $y \geq \frac{r}{c}$.

29. [Aplikace - Směsi] V nádrži je 1000 litrů roztoku vody a 15 kg soli. Do nádrže vtéká čistá voda rychlostí 10 l/min. Roztok je zcela promíchán a odtéká z nádrže stejnou rychlostí.

a) Sestavte diferenciální rovnici popisující množství soli v nádrži. Jaké bude toto množství po 20 minutách?

b) Jak se změní diferenciální rovnice pokud voda z nádrže odtéká rychlostí 20 l/min?

Řešení:

a) $y' = -\frac{1}{100}y$, $y(0) = 15$, $y = 15e^{\frac{1}{100}x}$, $y(20) = 12.28$ kg.

b) $y' = -\frac{2y}{100-t}$.

30. [Aplikace - Kmitání hmotného bodu] Závaží o hmotnosti $m = 2$ kg je zavěšeno na pružinu, kterou protáhne o 0.1 m. Na počátku kmitání je toto závaží přidrženo v pozici 0.05 m nad rovnovážným stavem a uvolněno. Popište pohyb závaží diferenciální rovnicí a doplňte ji o počáteční podmínky.

Řešení:

$$y'' = -10g y, y(0) = -0.05, y'(0) = 0.$$