První zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

skupina A

Poznámka: Všechna řešení jsou generována počítačem. Nezaručuji jejich správnost ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [*4 b.*] Nechť je dána plocha ohraničená křivkami

$$y = x^2, \quad y = \ln x, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 2.$$

   (a) Plochu nakreslete.
   (b) Určete její obsah. Výsledek ověřte vhodným odhadem obsahu plochy.
   (c) Určete její obvod. Integrály, které vzniknou při výpočtu sestavte a dále je nepočítejte.

   Řešení:
   $S = \frac{33}{8} - 5/2 \ln(2) \approx 2.392132048.$

2. [*4 b.*] Vypočítejte první parciální derivace funkce

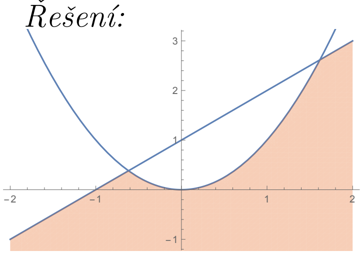
$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+y}(x-1)}{2}.$$

   Řešení:
   $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = x e^{x^2+y}(x-1) + 1/2\, e^{x^2+y},$
   $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 1/2\, e^{x^2+y}(x-1).$

3. [*3 b.*] Zapište a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x - y + 1}.$$

   Řešení:



4. [*4 b.*] Napište Taylorův polynom druhého stupně pro funkci $f(x,y) = \frac{\cos(x)}{y}$ v bodě $A = [\pi, 1]$. S jeho pomocí přibližně určete hodnotu $f(\frac{8\pi}{9}, 0.9)$. *Řešení:*
   $T_2(f, [\pi,1])(x,y) = -2 + y + 1/2\,(x-\pi)^2 - (y-1)^2\,,$
   $T_2(f, [\pi,1])(\frac{8\pi}{9}, 0.9) \approx -1.049076516.$

První zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

skupina B

Poznámka: Všechna řešení jsou generována počítačem. Nezaručuji jejich správnost ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [*4 b.*] Nechť je dána plocha ohraničená křivkami

$$y = -x^2, \quad y = \sin x, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

   (a) Plochu nakreslete.

   (b) Určete její obsah. Výsledek ověřte vhodným odhadem obsahu plochy.

   (c) Určete její obvod. Integrály, které vzniknou při výpočtu sestavte a dále je nepočítejte.

Řešení:
$S = 1 + \frac{1}{192}\pi^3 - 1/2\sqrt{2} \approx 0.4543842430.$

2. [*4 b.*] Vypočítejte první parciální derivace funkce

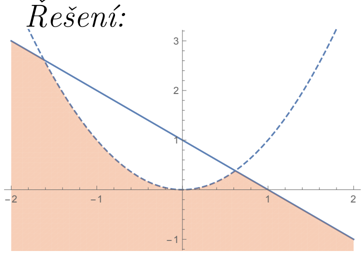
$$f(x,y) = \frac{e^{x^2}(x + 3y)}{4}.$$

Řešení:
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 1/2\, x e^{x^2}(x + 3y) + 1/4\, e^{x^2}$,
$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 3/4\, e^{x^2}$.

3. [*3 b.*] Zapište a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x - y}\ \ln(x^2 - y).$$

Řešení:



4. [*4 b.*] Napište Taylorův polynom druhého stupně pro funkci $f(x,y) = x^2 \ln y$ v bodě $A = [1, e]$. S jeho pomocí přibližně určete hodnotu $f(0.9, 0.9\,e)$. *Řešení:*
$T_2(f, [1,e])(x,y) = -1 + \frac{y - e^1}{e^1} + 2x - 1/2\frac{(y - e^1)^2}{(e^1)^2} + (x-1)^2 + 2\frac{(x-1)(y-e^1)}{e^1}$,
$T_2(f, [1,e])(0.9, 0.9e) = 0.725.$

První zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

skupina C

Poznámka: Všechna řešení jsou generována počítačem. Nezaručuji jejich správnost ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [*4 b.*] Nechť je dána plocha ohraničená křivkami

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \ln x, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 1.$$

   (a) Plochu nakreslete.

   (b) Určete její obsah. Výsledek ověřte vhodným odhadem obsahu plochy.

   (c) Určete její obvod. Integrály, které vzniknou při výpočtu sestavte a dále je nepočítejte.

   Řešení:
   $S = 1/2\ \ln(2) + 1/2 \approx 0.8465735903.$

2. [*4 b.*] Vypočítejte první parciální derivace funkce

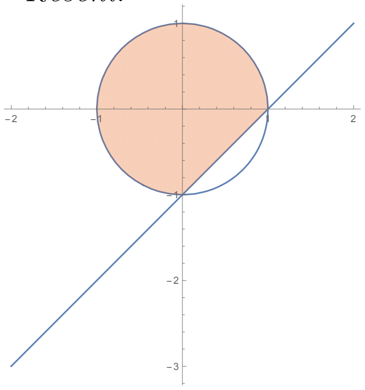
$$f(x,y) = \frac{3\cos\frac{2y}{x}}{x-1}.$$

   Řešení:
   $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 6\sin\left(2\,\frac{y}{x}\right) y x^{-2} (x-1)^{-1} - 3\cos\left(2\,\frac{y}{x}\right)(x-1)^{-2}$,
   $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -6\sin\left(2\,\frac{y}{x}\right) x^{-1} (x-1)^{-1}.$

3. [*3 b.*] Zapište a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x + y}.$$

   Řešení:



4. [*4 b.*] Napište Taylorův polynom druhého stupně pro funkci $f(x,y) = y^2 \sin(2x)$ v bodě $A = [\frac{\pi}{4}, -1]$. S jeho pomocí přibližně určete hodnotu $f(\frac{\pi}{5}, -1.1)$. *Řešení:*
   $T_2(f, [\frac{\pi}{4}, -1])(x,y) = -2\left(x - 1/4\,\pi\right)^2 + (y+1)^2 - 2y - 1$,
   $T_2(f, [\frac{\pi}{4}, -1])(\frac{\pi}{5}, -1.1) \approx 1.160651978.$

První zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

skupina D

Poznámka: Všechna řešení jsou generována počítačem. Nezaručuji jejich správnost ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [*4 b.*] Nechť je dána plocha ohraničená křivkami

$$y=\sqrt{x},\quad y=\ln x,\quad x=\frac{1}{2},\quad x=1.$$

   (a) Plochu nakreslete.

   (b) Určete její obsah. Výsledek ověřte vhodným odhadem obsahu plochy.

   (c) Určete její obvod. Integrály, které vzniknou při výpočtu sestavte a dále je nepočítejte.

   Řešení:
   $S=-1/6\,\sqrt{2}+7/6-1/2\,\ln(2)\approx 0.5843908163.$

2. [*4 b.*] Vypočítejte první parciální derivace funkce

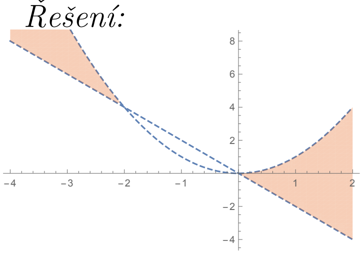
$$f(x,y)=\sqrt[3]{\frac{6\,x+1}{xy-6}}.$$

   Řešení:
   $\frac{\partial}{\partial x}f\,(x,y)=1/3\,\left(6\,(xy-6)^{-1}-\frac{(6\,x+1)y}{(xy-6)^2}\right)\left(\frac{6\,x+1}{xy-6}\right)^{-2/3},$
   $\frac{\partial}{\partial y}f\,(x,y)=-1/3\,(6\,x+1)\,x\left(\frac{6\,x+1}{xy-6}\right)^{-2/3}(xy-6)^{-2}.$

3. [*3 b.*] Zapište a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\ln(x^2-y)-\ln(2x+y).$$

   Řešení:



4. [*4 b.*] Napište Taylorův polynom druhého stupně pro funkci $f(x,y)=\frac{e^y}{x}$ v bodě $A=[1,0]$. S jeho pomocí přibližně určete hodnotu $f(1.2,0.2)$. *Řešení:*
   $T_2(f,[1,0])(x,y)=2+y-x+(x-1)^2-y\,(x-1)+1/2\,y^2$,
   $T_2(f,[1,0])(1.2,0.2)=1.02.$

První zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

skupina E

Poznámka: Všechna řešení jsou generována počítačem. Nezaručuji jejich správnost ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [*3 b.*] Nechť je dána plocha ohraničená křivkami

$$y = \ln x, \quad y = \ln \frac{1}{2}, \quad y = \ln 2, \qquad x = 0.$$

   (a) Plochu nakreslete.

   (b) Určete její obsah. Integrály, které vzniknou při výpočtu sestavte a dále je nepočítejte.

Řešení:

2. [*3 b.*] Vypočítejte první parciální derivace funkce

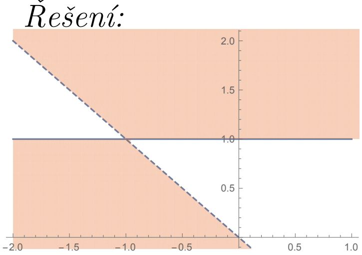
$$f(x,y) = \frac{(y^2-3)\sin\frac{3x}{y}}{4}.$$

Řešení:
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3/4\ (y^2-3)\cos\left(3\,\frac{x}{y}\right) y^{-1}$,
$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 1/2\, y \sin\left(3\,\frac{x}{y}\right) - 3/4\ (y^2-3)\cos\left(3\,\frac{x}{y}\right) x y^{-2}$.

3. [*3 b.*] Zapište a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y-1}{x+y}}.$$

Řešení:



4. [*3 b.*] Mějme dánu funkci $f(x,y) = \frac{1}{xy^2}$ a bod $A = [2,1]$.

   (a) Nahraďte tuto funkci v okolí bodu A Taylorovým polynomem druhého stupně.

   (b) Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě A.

Řešení:
$T_2(f,[2,1])(x,y) = 2 - y - 1/4\,x + 3/2\ (y-1)^2 + 1/8\ (x-2)^2 + 1/2\ (x-2)(y-1)$,
$z = 2 - y - 1/4\,x$.

5. [*3 b.*] Nalezněte stacionární body funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y}\,(5 - 2\,x + y)\,.$$

Řešení:
$[1,-2]$.

První zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

skupina F

Poznámka: Všechna řešení jsou generována počítačem. Nezaručuji jejich správnost ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [*3 b.*] Nechť je dána plocha ohraničená křivkami

$$y = \mathrm{e}^x, \quad y = 2, \quad y = 4, \quad x = 0.$$

   (a) Plochu nakreslete.

   (b) Určete její obsah. Integrály, které vzniknou při výpočtu sestavte a dále je nepočítejte.

Řešení:

2. [*3 b.*] Vypočítejte první parciální derivace funkce

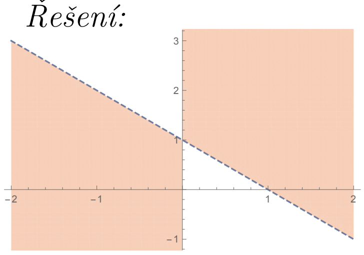
$$f(x, y) = 6\sqrt{y\,(xy + 1)}.$$

Řešení:
$\frac{\partial}{\partial x} f\,(x, y) = 3\,\frac{y^2}{\sqrt{y(xy+1)}}$,
$\frac{\partial}{\partial y} f\,(x, y) = 3\,\frac{2\,xy+1}{\sqrt{y(xy+1)}}$.

3. [*3 b.*] Zapište a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln\big(x\;(x + y - 1)\big).$$

Řešení:



4. [*3 b.*] Mějme dánu funkci $f(x, y) = \frac{1}{(x^2-y)}$ a bod $A = [1, -2]$.

   (a) Nahraďte tuto funkci v okolí bodu A Taylorovým polynomem druhého stupně.

   (b) Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě A.

Řešení:
$T_2(f, [1, -2])(x, y) = \frac{7}{9} - 2/9\,x + y/9 + 1/27\;(x - 1)^2 - \frac{(4\,y+8)(x-1)}{27} + 1/27\;(y + 2)^2$,
$z = \frac{7}{9} - 2/9\,x + 1/9\,y$.

5. [*3 b.*] Nalezněte stacionární body funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{\frac{y}{2}}\left(x^2 + xy\right).$$

Řešení:
$[0, 0], \quad [2, -4]$.

První zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

skupina G

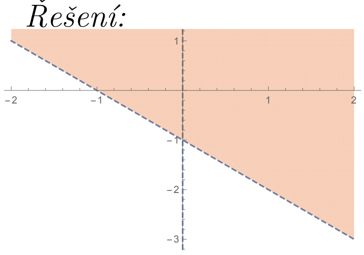
Poznámka: Všechna řešení jsou generována počítačem. Nezaručuji jejich správnost ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [*3 b.*] Nechť je dána plocha vymezená podmínkami
$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \leq x^2.$$
   (a) Plochu nakreslete.
   (b) Určete její obsah. Integrály, které vzniknou při výpočtu sestavte a dále je nepočítejte.

   Řešení:

2. [*3 b.*] Vypočítejte první parciální derivace funkce
$$f(x,y) = \frac{\cos(4\,xy)}{2\,x^2 - 2}.$$
   Řešení:
   $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -4\,\frac{\sin(4\,xy)y}{2\,x^2-2} - 4\,\frac{\cos(4\,xy)x}{(2\,x^2-2)^2}$,
   $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -4\,\frac{\sin(4\,xy)x}{2\,x^2-2}$.

3. [*3 b.*] Zapište a zakreslete definiční obor funkce
$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x+y+1}{x^2}\right).$$
   Řešení:



4. [*3 b.*] Mějme dánu funkci $f(x,y) = \frac{1}{x-y^2}$ a bod $A = [2,1]$.
   (a) Určete totální diferenciál funkce f v bodě A.
   (b) Pomocí předchozího výpočtu určete přibližně $f(1.9, 1.01)$.

   Řešení:
   $\mathrm{d}f([2,1],(h,k)) = -h + 2\,k$,
   $\mathrm{d}f([2,1],(-0.1,0.01)) = 0.12$,
   $f(1.9,1.01) \approx f(2,1) + \mathrm{d}f([2,1],(-0.1,0.01)) = 1.12$.

5. [*3 b.*] Nalezněte stacionární body funkce
$$f(x,y) = \mathrm{e}^{2\,x+7}\left(xy - 2\,y^2\right).$$
   Řešení:
   $[0,0], \quad [-1,-1/4]$.

První zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

skupina H

Poznámka: Všechna řešení jsou generována počítačem. Nezaručuji jejich správnost ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [*3 b.*] Nechť je dána plocha ohraničená křivkami

$$y = \mathrm{e}^x, \quad y = \mathrm{e}^{-x}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

   (a) Plochu nakreslete.

   (b) Určete její obsah. Integrály, které vzniknou při výpočtu sestavte a dále je nepočítejte.

   Řešení:

2. [*3 b.*] Vypočítejte první parciální derivace funkce

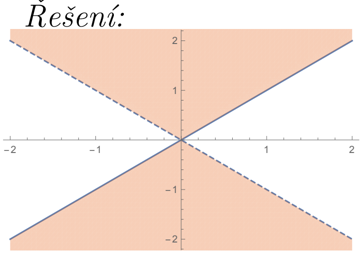
$$f(x,y) = \frac{2-y^3}{\ln(xy+1)}.$$

   Řešení:
   $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -\frac{(-y^3+2)y}{(\ln(xy+1))^2(xy+1)}$,
   $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -3\,\frac{y^2}{\ln(xy+1)} - \frac{(-y^3+2)x}{(\ln(xy+1))^2(xy+1)}$.

3. [*3 b.*] Zapište a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y-x}{x+y}}.$$

   Řešení:



4. [*3 b.*] Mějme dánu funkci $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$ a bod $A = [-1, 3]$.

   (a) Určete totální diferenciál funkce f v bodě A.

   (b) Pomocí předchozího výpočtu určete přibližně $f(-1.1, 2.8)$.

   Řešení:
   $\mathrm{d}f([-1,3],(h,k)) = 6\,h + k$,
   $\mathrm{d}f([-1,3],(-0.1,-0.2)) = -0.8$,
   $f(-1.1, 2.8) \approx f(-1,3) + \mathrm{d}f([-1,3],(-0.1,-0.2)) = 2.2$.

5. [*3 b.*] Nalezněte stacionární body funkce

$$f(x,y) = y\ln x^2 + x.$$

   Řešení:
   $[1, -1/2], \quad [-1, 1/2]$.

První zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

skupina I

Poznámka: Všechna řešení jsou generována počítačem. Nezaručuji jejich správnost ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [*3 b.*] Nechť je dána plocha ohraničená křivkami

$$y = \mathrm{e}^{x}, \quad y = \mathrm{e}^{-x}, \quad y = 2.$$

   (a) Plochu nakreslete.

   (b) Určete její obsah. Integrály, které vzniknou při výpočtu sestavte a dále je nepočítejte.

   Řešení:

2. [*3 b.*] Vypočítejte první parciální derivace funkce

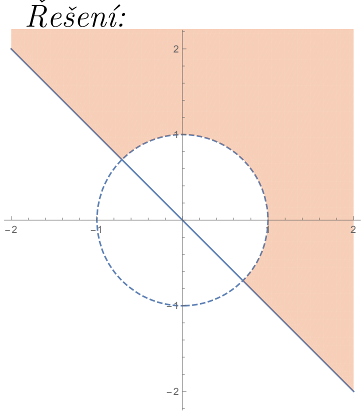
$$f(x,y) = \frac{x^2 y\sqrt{x^2-y^2}}{2}.$$

   Řešení:
   $\frac{\partial}{\partial x} f\left(x,y\right) = xy\sqrt{x^2-y^2} + 1/2\, \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2-y^2}}$,
   $\frac{\partial}{\partial y} f\left(x,y\right) = 1/2\, x^2\sqrt{x^2-y^2} - 1/2\, \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

3. [*3 b.*] Zapište a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{2x+2y}\ \ln\left(x^2+y^2-1\right).$$

   Řešení:



4. [*3 b.*] Mějme dánu funkci $f(x,y) = \frac{1+x}{y^2}$ a bod $A = [0,2]$.

   (a) Určete totální diferenciál funkce f v bodě A.

   (b) Pomocí předchozího výpočtu určete přibližně $f(0.15, 1.9)$.

   Řešení:
   $\mathrm{d}f([0,2],(h,k)) = h/4 - k/4$,
   $\mathrm{d}f([0,2],(0.15,-0.1)) = 0.0625$,
   $f(0.15,1.9) \approx f(0,2) + \mathrm{d}f([0,2],(0.15,-0.1)) = 0.3125$.

5. [*3 b.*] Nalezněte stacionární body funkce

$$f(x,y) = y^2 \ln x - x.$$

   Řešení:
   $[1,1], \quad [1,-1]$.

První zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

skupina J

Poznámka: Všechna řešení jsou generována počítačem. Nezaručuji jejich správnost ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [*3 b.*] Nechť je dána plocha vymezená podmínkami

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad y - 1 \leq 0.$$

   (a) Plochu nakreslete.

   (b) Určete její obsah. Integrály, které vzniknou při výpočtu sestavte a dále je nepočítejte.

Řešení:

2. [*3 b.*] Vypočítejte první parciální derivace funkce

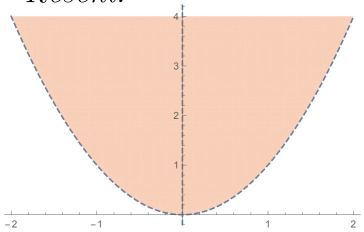
$$f(x, y) = \frac{\ln(7 - xy)}{2\,x^2 - 3}.$$

Řešení:
$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -\frac{y}{(-xy+7)(2\,x^2-3)} - 4\,\frac{\ln(-xy+7)x}{(2\,x^2-3)^2}$,
$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{x}{(-xy+7)(2\,x^2-3)}$.

3. [*3 b.*] Zapište a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln\left(x^2\left(y - x^2\right)\right).$$

Řešení:



4. [*3 b.*] Mějme dánu funkci $f(x, y) = \frac{1}{yx+1}$ a bod $A = [2, 2]$.

   (a) Určete totální diferenciál funkce f v bodě A.

   (b) Pomocí předchozího výpočtu určete přibližně $f(1.9, 2.1)$.

Řešení:
$\mathrm{d}f([2, 2], (h, k)) = -\frac{2}{25}\,h - \frac{2}{25}\,k$,
$\mathrm{d}f([2, 2], (-0.1, 0.1)) = 0.0$,
$f(1.9, 2.1) \approx f(2, 2) + \mathrm{d}f([2, 2], (-0.1, 0.1)) = 0.2$.

5. [*3 b.*] Nalezněte stacionární body funkce

$$f(x, y) = y \ln x^2 - x^2.$$

Řešení:
$[-1, 1], \quad [1, 1]$.