

Ukázková zápočtová písemka z Matematiky I-2 (BA07, MA07)

1. [3 body] Určete obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{2}$. Plochu nakreslete. Výsledek ověřte vhodným odhadem obsahu plochy.
2. [2 body] Určete objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = -x^2 + 1$ a $g(x) = -2x^2 + 2$. Integrály sestavte a dále je nepočítejte. Těleso nakreslete.
3. [2 body] Vypočítejte první parciální derivace funkce $f(x, y) = \frac{1}{xy} + xy^3 \sin 2x - 2\pi$ v bodě $A = [\pi, 2]$.
4. [2 body] Zapište a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln(\ln xy).$$

5. [2 body] Napište Taylorův polynom druhého stupně pro funkci $f(x, y) = y \ln x$ v bodě $A = [1, 1]$. S jeho pomocí přibližně určete hodnotu $f(0.8, 1.4)$ a srovnajte ji s přesnou hodnotou.
6. [3 body] Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 6xy + 4$.

Řešení:

1. $\sqrt{3} - (1/3)\pi$.
2. $V = \pi \int_{-1}^1 [-2x^2 + 2]^2 dx - \pi \int_{-1}^1 [-x^2 + 1]^2 dx$.
3. $f'_x(\pi, 2) = -\frac{1}{2\pi^2} + 16\pi$, $f'_y(\pi, 2) = -\frac{1}{4\pi}$.
4. $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x > 0 \wedge y > 1/x) \vee (x < 0 \wedge y < 1/x)\}$.
5. $T_2(f, [1, 1])(x, y) = x - 1 - 1/2 (x - 1)^2 + (y - 1)(x - 1)$,
 $T_2(f, [1, 1])(0.8, 1.4) = -0.3$,
 $f(0.8, 1.4) \cong -0.3124009718$.
6. $[1/2, 1]$ je lok. min, $[0, 0]$ je stacionární bod.