

Zápočtová písemka z Matematiky IV (CA01)

Ukázková písemka

Všechny výpočty ve všech příkladech provádějte s přesností na **4 desetinná místa**.

1. [10 bodů] Budiž dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 6x + y + 2z &= -1 \\ x + 2y - 2z &= 3 \\ 2x - 2y + 4z &= -4 \end{aligned}$$

- a) Zjistěte, zda matice soustavy lineárních rovnic je symetricky pozitivně definitní, pokud ano, tak najděte její Choleského rozklad a s jeho pomocí soustavu vyřešte.
 b) Dále spočítejte normy $\|b\|_1, \|b\|_\infty, \|b\|_2$, kde b je vektor pravých stran.

2. [10 bodů] Nechť je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x - y^2 &= 0, \\ x^2 + (y - 1)^2 &= 4. \end{aligned}$$

- a) Grafickou metodou nejděte počet kořenů.
 b) Vypočítejte první dvě iterace Newtonovy metody při volbě počáteční approximace $(x_0, y_0) = (0, -1)$.

3. [10 bodů] Uvažujme naměřené hodnoty y_i v bodech x_i

| | | | |
|-------|-----|-----|---|
| x_i | 1 | 2 | 3 |
| y_i | 4.3 | 2.1 | 0 |

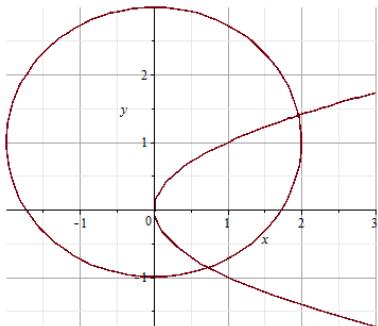
- a) Proložte je Newtonovým interpolačním polynomem a s jeho pomocí určete interpolujte hodnotu pro $x = 2.5$.
 b) Metodou nejmenších čtverců najděte approximační přímku, odhadněte hodnotu pro $x = 2.5$ a dále určete příslušný součet kvadratických odchylek.

Příklad 1:

a) $U = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 1/6\sqrt{6} & 1/3\sqrt{6} \\ 0 & 1/6\sqrt{66} & -\frac{7}{33}\sqrt{66} \\ 0 & 0 & 2/11\sqrt{11} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$

b) $\|b\|_1 = 8, \|b\|_\infty = 4, \|b\|_2 = \sqrt{26}$.

Příklad 2:



- a) Počet kořenů: 2
 b) 1. iterace $[x, y] = [1, -1]$, 2. iterace $[x, y] = [0.75, -0.875]$

Příklad 3:

- a) $P_2(x) = 4.3 - 2.2(x - 1) + 0.05(x - 1)(x - 2), P_2(2.5) = 1.0375.$
 b) $P_1(x) = -2.15x + 6.4333, P_1(2.5) = 1.0583$, součet kvadratických odchylek $S = 0.0017$.